Warszawa, 18 maja 2026 r.

dr hab. inż. Marek Gągolewski, prof. uczelni
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Grzegorza Mosia „Algorytmy agregujące modele o geometrii heksagonalnej"

Pracę pisemną „Algorytmy agregujące modele o geometrii heksagonalnej" p. mgr Grzegorz Moś napisał pod opieką Promotora w osobie prof. dra hab. Michała Baczyńskiego. Niniejszym przeprowadzam jej ocenę w kontekście spełnienia wymogów formalnych stawianych rozprawom doktorskim w dyscyplinie Informatyka w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych.

1 Rozprawa i jej wkład

W pracy proponowane są nowe o oryginalne metody porównywania i agregacji ścieżek na siatce heksagonowej, które Doktorant nazywa heksastruktami (jest to problem, który nie był jeszcze rozpatrywany w literaturze przedmiotu). Heksastrukty reprezentowane są przy użyciu pewnych trójczłonowych ciągów binarnych. Główne i pokrewne cele rozprawy zostały wymienione na s. 10 a podsumowane bardzo szczegółowo w rozdz. 6 rozprawy.

Praca składa się z 167 stron podzielonych na wstęp, pięć głównych rozdziałów, zakończenie i dwa dodatki. Struktura pracy jest bardzo przejrzysta, błędów redakcyjnych jest mało; pod względem językowym jest ona na wysokim poziomie. Dowody wszystkich zaprezentowanych wyników są bardzo szczegółowe.

Rozdział 1 przedstawia raczej proste podstawowe zagadnienia matematyczne dotyczące głównie elementarnej geometrii.

W rozdziale 2 podana są definicja rozszerzonych ciągów binarnych, z którą Doktorant pracuje w całej rozprawie. Sporą jego część stanowią wyniki dotyczące rozkładów tych ciągów w postaci drzewa ternarnego (mogłyby chyba być przeniesione do dodatku A). Ważnym podrozdziałem jest jednak ten dotyczący operacji na zaproponowanych ciągach.

Definicji i własnościom heksastruktów poświęcony jest rozdział 3. Pokazany jest tam związek między heksastruktami a rozszerzonymi ciągami binarnymi.

W rozdziale 4 zaproponowano relacje porządku (np. porządek epaleksykograficzny) i metryki (np. rozszerzoną ważoną odległość Hamminga) na zbiorze heksastruktów oraz metody ich agregacji (np. medoid). Tutaj najbardziej widać umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej u Kandydata oraz rozwiązywania problemów, bowiem przedstawił on kompletną propozycję nowatorskich metod agregacji danych nowego typu.

Rozdział 5 poświęcony jest zastosowaniom uzyskanych wyników, w tym w przyjemnej grze planszowej Catan oraz w systemach wieloagentowych.

Rozdział 6 podsumowuje uzyskane wyniki, mówi o ich ograniczeniach i daje pomysły na badania przyszłe.

W dodatku A przedstawione zostały dość ciekawe wyniki pokrewne, dotyczące m.in. współrzędnych heksastruktów, pytania o istnienie heksastruktu reprezentowanego przez dany ciąg binarny, czy zliczania ścieżek pewnego rodzaju na siatce heksagonalnej.

W dodatku B przedstawiona jest implementacja wybranych procedur w języku Python. Wybrane kody udostępnione są w repozytorium na GitHubie.

Bibliografia składa się z 49 pozycji i zawiera najważniejsze pozycje literatury klasycznej i najnowszej związane z tematyką rozprawy; jest więc kompletna.

Część wyników uzyskanych w pracy została zaprezentowana na pięciu międzynarodowych konferencjach związanych z tematyką rozprawy i dyscypliną informatyka (IFSA-EUSFLAT-AGOP'21, IPMU'22, EUSFLAT'23, FSTA'24, PP-RAI'25). Doktorant ma w dorobku trzy artykuły opublikowane w recenzowanych materiałach z konferencji międzynarodowych; co najmniej dwa z nich w roku opublikowania artykułu w ostatecznej formie były ujęte w wykazie sporządzonym zgodnie z przepisami, o których mowa w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2022 r. poz. 574 z późn. zm.), tj. materiały konferencji FUZZ-IEEE oraz IPMU.

2 Uwagi

Mam do pracy następujące uwagi. Żadna z nich oczywiście nie dyskwalifikuje uzyskanych wyników.

1. Na s. 111 czytamy „każdy ciąg binarny lub rozszerzony ciąg binarny reprezentuje dokładnie jeden heksastrukt" a potem na s. 127 „prezentujemy sposoby, dzięki którym możemy stwierdzić, że dla danego ciągu binarnego na pewno nie istnieje heksastrukt, który mógłby reprezentować" – pierwsze zdanie zawiera więc pewną nieścisłość.
2. Z punktu widzenia agregacji heksastruktów, w jakich zastosowaniach ciągi 0(0)(0) i 1(0)1 (oraz być może 1(1)0) a także 0(0)1 i 0(1)0 (a także być może 1(1)1) reprezentują ten sam obiekt geometryczny (por. rys. 4.3 i 4.4)? Kiedy bardziej nam zależy na odwzorowaniu samego kształtu, a kiedy ważny jest punkt zaczepienia ścieżki i kierunek pierwszego odcinka? Spójrzmy na rys. 4.4: 0(0)(0) i 1(0)1 mają ten sam kształt, ale rozpoczynają się w różnych punktach. Z drugiej strony, nie ma tam trzeciej ścieżki, która ma ten sam kształt, ale startuje z punktu u góry.
3. Podrozdz. 2.4: Przy odwracaniu rozszerzonego ciągu binarnego trzeba uważać, jaki podciąg staje się przedrostkiem, skoro wg definicji 2.1.1 w rozszerzonym ciągu binarnym pierwszy człon jest zwykłym (nierozszerzonym) ciągiem binarnym. Z tego punktu widzenia procedura B.4.7 przedstawiona w podrozdz. B.4 jest błędna. Przedrostkiem nie jest po prostu odwrócenie przyrostka lecz jego pierwszy człon. Można to zobaczyć w przykładzie 2.4.2.
4. Na s. 100 mamy wzmiankę, że w symulacji gry Catan generowane są ścieżki

bez cykli, dzięki czemu można „reprezentować każdą symulację dokładnie jednym heksastruktem”. Ogólnie brakuje mi jednak poszerzonej dyskusji na temat (nie)jednoznaczności reprezentacji heksastruktów przy użyciu rozszerzonych ciągów binarnych. Jak wpłynie ona na wyniki agregacji? Jak można byłoby je ujednoznacznić? Można by podać jakieś wyniki dotyczące liczby różnych sposobów reprezentacji w poszczególnych przypadkach, np. jako funkcji liczby cykli.

5. Medoid nie jest wyznaczony jednoznacznie (por. uwagę na s. 86). Jakie to ma znaczenie praktyczne, np. w analizie przykładów w grze Catan?
6. Na s. 88: „porównywanie ciągów binarnych oraz rozszerzonych ciągów binarnych [...] silnie zależy od kontekstu oraz charakterystyki problemu, w jakim metoda ta ma zostać wykorzystana.” - zgoda; szkoda jednak, że nie przedstawiono jakichś dodatkowych pomysłów np. w kontekście szeroko omawianej gry Catan.
7. Zgodnie z twierdzeniem 4.2.16, porządek epaleksykograficzny jest porządkiem liniowym na zbiorze ciągów binarnych. Na rysunku 4.5 mamy diagram Hassego dla przykładowych ciągów binarnych; zatem czemu w przykładzie 4.2.19 czytamy, że „w porównaniu z diagramem Hassego dla porządku leksykograficznego obserwujemy wzrost liczby par elementów, które są nieporównywalne względem siebie w nowym porządku”? Piszmy więc albo zawsze o rozszerzonych ciągach binarnych, gdy takie mamy na myśli, albo podkreślajmy, kiedy jakiś wynik dotyczy ciągów zwykłych (nierozszerzonych).
8. W rozdziale 4 brakuje szerszej dyskusji na temat związku wyników dotyczących porządków na heksastruktach i ich agregacji. W szczególności, dlaczego w klasycznej teorii agregacji zwraca się w ogóle uwagę na zachowanie porządku (monotoniczność)? Tutaj Autor mógł się bardziej popisać wiedzą z tej dziedziny (którą przecież posiada).
9. Na rysunku 5.6 przedstawione są swoiste histogramy ścieżek. A czy nie mogłyby one posłużyć do stworzenia nowej metody agregacji heksastruktów (ścieżka złożona z fragmentów, które przekraczają pewien próg prawdopodobieństwa empirycznego, z ewentualnym jej uspójnieniem i usunięciem cykli)? Można też pokusić się o ocenę jakości medoidów, porównując je z histogramem.
10. Rysunek 5.7: można by rozważyć ścieżki, które startują z tego samego punktu i idą w prawo oraz, z tym samym prawdopodobieństwem, do góry lub do dołu (à la proces Wienera, chociaż to daleka analogia). Czy wówczas mamy nadzieję, że rozpatrywane metody agregacji dadzą w wyniku heksastrukt podobny do „prostej” (na tyle, na ile to możliwe)? Na przykład ciekawym wynikiem mogłoby być to, że centroid względem jakiejś metryki ma „wartość oczekiwaną 0” w tym modelu (po jej formalnym dobrym zdefiniowaniu).
11. Dodatek B: Użycie pakietu `numba` jest dobrym pomysłem. Zastanawiam się jednak, czemu do reprezentacji ciągów binarnych nie zostały użyte `numpy.ndarray` z `dtype=uint8`? Pewne operacje byłyby wykonywane znacznie szybciej, np. odwrócenie wszystkich bitów `x` to `1-x`. Ponadto `x[::-1]` w `numpy` to operacja wykonywana w czasie stałym (inny widok na istniejącą tablicę).
12. Na s. 9 można by dodać informację, że heksastrukty to grafy planarne.

13. Opis rys. 1.5 odnosi się do pojęcia heksastruktu, które nie zostało jeszcze zdefiniowane.
14. Czy ciągi B_1, B_2, B_3 w def. 2.2.1 mogą być puste?
15. Na s. 41: binarnyCH.
16. Skorowidz nazw jest miłym dodatkiem, ale na próżno szukałem tam słowa „medoid". Ponadto, „Ś" pojawia się po „Z".

3 Podsumowanie

Rozprawa doktorska mgra Grzegorza Mosia zawiera wiele oryginalnych wyników, w szczególności oryginalne rozwiązanie problemu naukowego dotyczącego agregacji heksastruktów. Moja ocena tej pracy pisemnej jest pozytywna. Rozprawa prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną Kandydata w dyscyplinie Informatyka w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

Podsumowując, zgodnie z Dz. U. z 2022 r. poz. 574 z późn. zm. (Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce), praca „Algorytmy agregujące modele o geometrii heksagonalnej" spełnia warunki formalne i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuję o jej przyjęcie oraz o dopuszczenie jej do publicznej obrony.

Marek Gągolewski

PODPIS ZAUFANY
MAREK
GĄGOLEWSKI
18.05.2026 10:20:11 GMT+0200
Dokument podpisany elektronicznie podpisem zaufanym