

## **Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Grzegorza Mosia**

### **pt. „Algorytmy agregujące modele o geometrii heksagonalnej”**

*napisanej pod kierunkiem prof. dr. hab. Michała Baczyńskiego*

#### **1. OPINIA OGÓLNA**

Przedłożona do recenzji rozprawa doktorska mgra Grzegorza Mosia pt. „Algorytmy agregujące modele o geometrii heksagonalnej” jest opracowaniem z pogranicza informatyki teoretycznej, geometrii dyskretnej, teorii grafów i metod agregacji danych. Tematem pracy jest porównywanie oraz agregacja spójnych struktur grafowych osadzonych na siatce heksagonalnej, nazwanych w rozprawie heksastruktami. Autor proponuje reprezentowanie ścieżek takich struktur za pomocą ciągów binarnych, następnie rozszerza tę reprezentację na struktury rozgałęzione i wykorzystuje ją do konstruowania metryk, porządków częściowych oraz procedur agregacji.

Rozprawę oceniam pozytywnie. Praca zawiera wyraźny wkład własny: definicję i analizę rozszerzonych ciągów binarnych, konstrukcję reprezentacji heksastruktur, propozycje metryk dla tych reprezentacji, wykorzystanie medoidu oraz porządków częściowych jako narzędzi agregacyjnych, a także implementacje w języku Python. Autor wykazuje dobrą orientację w aparacie formalnym oraz konsekwentnie rozwija własny model reprezentacji i agregacji obiektów heksagonalnych.

Jednocześnie rozprawa nie jest wolna od usterek. Najpoważniejsza uwaga dotyczy dowodu twierdzenia 1.4.6, w którym użyto nieuzasadnionego przejścia odpowiadającego przemienności obrotu i odbicia. Sama teza twierdzenia, rozumiana jako zachowanie kąta nieorientowanego przez izometrię, jest prawdziwa, lecz przedstawiony dowód wymaga poprawy. Ponadto w kilku miejscach dowody są nadmiernie skrótowe, część zastosowań ma raczej charakter ilustracyjny niż walidacyjny, a warstwa językowo-redakcyjna wymaga korekty.

#### **2. OCENA MERYTORYCZNA**

##### **2.1. Znaczenie problematyki podjętej w rozprawie**

Podjęta problematyka jest specjalistyczna, ale uzasadniona. Agregacja struktur grafowych jest trudniejsza niż agregacja danych wektorowych lub liczbowych, ponieważ wymaga zachowania informacji o kształcie, połączeniach i relacjach geometrycznych. Autor koncentruje się na klasie

grafów o geometrii heksagonalnej, czyli na strukturach naturalnie występujących w modelach planszowych, sieciach, kratowych modelach przestrzeni, chemii organicznej i materiałach opartych na strukturach sześciokątnych. Zaletą rozprawy jest to, że Autor nie ogranicza się do bezpośredniego porównywania grafów, lecz wprowadza pośrednią reprezentację kombinatoryczną. Reprezentacja przez ciągi binarne i rozszerzone ciągi binarne pozwala przenieść problem geometrii grafowej na grunt operacji na ciągach oraz drzewach. Jest to pomysł metodycznie trafny, bo upraszcza definicje porównywania i umożliwia konstrukcję algorytmów agregujących.

Temat nie ma charakteru masowego nurtu badawczego, ale mieści się w informatyce i ma czytelny komponent algorytmiczny. Wartość pracy polega przede wszystkim na formalizacji nowej klasy reprezentacji oraz na pokazaniu, że taka reprezentacja może służyć do porównywania i agregowania heksastruktur.

## **2.2. Cele, hipotezy i metodyka badawcza**

Cele pracy zostały sformułowane we wstępie jasno. Autor wskazuje m.in. rozszerzenie pojęcia ciągu binarnego, wyprowadzenie wzorów na obrót i odbicie lustrzane, zdefiniowanie metryk, agregację z użyciem medoidu i centroidu, wykorzystanie porządków częściowych oraz implementację narzędzi w języku Python. Metodyka pracy jest zasadniczo poprawna i ma charakter formalno-konstrukcyjny. Autor najpierw buduje aparat geometryczny, następnie definiuje obiekty kombinatoryczne, potem wiąże je z heksastrukturami, a na końcu wykorzystuje zaproponowane reprezentacje do porównywania i agregacji. Taka kolejność jest logiczna i sprzyja spójności wywodu.

Słabszą stroną metodyki jest ograniczona empiryczna walidacja zastosowań. Rozdział 5 pokazuje możliwe użycia w teorii gier, wiedzy rozproszonej i chemii organicznej, ale w większości są to przykłady lub demonstracje potencjału metody, a nie pełne eksperymenty porównawcze. Nie jest to wada dyskwalifikująca rozprawę o charakterze formalnym, jednak zakres weryfikacji praktycznej powinien być w pracy wyraźniej odróżniony od części teoretycznej.

## **2.3. Struktura rozprawy**

Rozprawa liczy 167 stron, w tym strony tytułowe, streszczenia, spis treści, sześć rozdziałów, dwa dodatki, bibliografię oraz skorowidze. Układ pracy jest przejrzysty. Rozdział 1 wprowadza aparat geometryczny i porządkowy. Rozdział 2 definiuje rozszerzone ciągi binarne. Rozdział 3 wprowadza heksastrukty i ich reprezentację. Rozdział 4 zawiera główne konstrukcje metryczne i porządkowe. Rozdział 5 omawia zastosowania. Rozdział 6 podsumowuje wyniki. Dodatki zawierają wyniki pokrewne oraz implementacje.

Proporcje pracy są zasadniczo właściwe. Główne wyniki znajdują się w rozdziałach 2-4 oraz częściowo w dodatku A. Rozdział 5 jest krótszy i ma charakter aplikacyjno-ilustracyjny. Dodatek B, zawierający implementacje, jest istotnym uzupełnieniem informatycznego charakteru rozprawy.

Pewnym mankamentem strukturalnym jest bardzo rozbudowany rozdział 1. Część geometryczna jest poprawnie motywowana, ale wiele wyników można było przedstawić krócej, korzystając z algebry liniowej, iloczynu skalarnego, wyznacznika i własności izometrii. Obecna wersja jest szczegółowa, lecz miejscami zaciemnia główny tok pracy.

## 2.4. Literatura

Bibliografia obejmuje 49 pozycji. Zawiera publikacje z teorii grafów, agregacji, geometrii, systemów wieloagentowych, zastosowań siatki heksagonalnej oraz prace własne lub współautorskie Doktoranta powiązane z rozprawą. Wykorzystana literatura jest wystarczająca dla zdefiniowanego zakresu pracy, choć nie jest bardzo obszerna. Na plus należy zaliczyć obecność aktualnych pozycji, w tym publikacji z lat 2020-2025, oraz wskazanie artykułów, w których Autor publikował wyniki wykorzystane w rozprawie. W bibliografii znajdują się też klasyczne pozycje z teorii grafów i algorytmiki. Z punktu widzenia recenzenta warto byłoby jednak silniej osadzić pracę w literaturze dotyczącej porównywania grafów, graph edit distance, kernelowych metod porównywania grafów, kanonicznych reprezentacji grafów, reprezentacji struktur kratowych oraz agregacji obiektów niewektorowych. Autor deklaruje niewielkie rozpoznanie tematu w literaturze, ale to twierdzenie wymagałoby szerszego przeglądu porównawczego.

## 2.5. Szczegółowa ocena poszczególnych części rozprawy

### Wstęp

Wstęp dobrze określa przedmiot rozprawy, motywację oraz cele. Autor jasno wyjaśnia, czym są heksastrukty i dlaczego agregacja takich obiektów wymaga odrębnego aparatu. Wskazane cele są adekwatne do zawartości pracy. Wstęp zawiera również listę publikacji i konferencji, na których prezentowano wyniki.

Uwagi krytyczne dotyczą głównie stylu i ostrości uzasadnienia. Pojawiają się sformułowania zbyt ogólne, np. o postępie technologicznym i konieczności optymalizacji procesów. Przydałoby się krótsze, bardziej precyzyjne uzasadnienie luki badawczej oraz bardziej bezpośrednie porównanie z istniejącymi metodami porównywania grafów.

### Rozdział 1. Podstawowe zagadnienia matematyczne

Rozdział 1 wprowadza potrzebne pojęcia z geometrii płaskiej, macierze obrotu i odbicia, własności tych operacji oraz podstawowe pojęcia z teorii porządków częściowych. Zakres materiału jest odpowiedni, ponieważ późniejsze rozdziały korzystają z orientacji kątów, odbić lustrzanych i relacji porządkowych.

Najważniejsza uwaga merytoryczna dotyczy twierdzenia 1.4.6. W dowodzie Autor przechodzi od wyrażenia  $\text{Rot}(\phi) \text{Ref}(\alpha)(p_0-p_1) + \text{Ref}(\alpha)(p_1-p) + p$  do  $\text{Ref}(\alpha)(\text{Rot}(\phi)(p_0-p_1) + p_1-p) + p$ . Takie przejście wymagałoby ogólnie przemienności  $\text{Rot}(\phi)$  i  $\text{Ref}(\alpha)$ , która nie zachodzi. Z twierdzenia 1.4.1 wynika wręcz, że  $\text{Rot}(\phi) \text{Ref}(\alpha)$  i  $\text{Ref}(\alpha) \text{Rot}(\phi)$  są zwykle różnymi odbiciami. Tezę można udowodnić poprawnie przez zachowanie iloczynu skalarnego i

długości przez odbicie, ewentualnie przez fakt, że odbicie jest izometrią. W obecnej postaci dowód należy poprawić.

Dodatkowo dowody twierdzeń 1.2.1 i 1.3.1 są bardzo kazuistyczne. Wyniki są standardowe i poprawne, ale ich wykazanie przez liczne przypadki ćwiartek zwiększa ryzyko błędów notacyjnych. Bardziej elegancki i bezpieczny byłby dowód macierzowy lub wektorowy.

## **Rozdział 2. (Rozszerzone) ciągi binarne**

Rozdział 2 jest jedną z najważniejszych części pracy. Autor definiuje rozszerzone ciągi binarne, ich rozwinięcie, relację z drzewem ternarnym oraz podstawowe operacje na tych obiektach. Definicje są zasadniczo spójne i tworzą fundament dalszych rozważań.

Pozytywnie oceniam próbę formalnego osadzenia rozszerzonych ciągów binarnych jako struktur rekurencyjnych. Pozwala to stosować indukcję strukturalną i uzasadnia późniejsze definicje metryk. Rozdział jest techniczny, lecz potrzebny.

Uwagi dotyczą głównie prezentacji. Część twierdzeń i przykładów wymagałaby dodatkowych komentarzy intuicyjnych. Dla czytelnika mniej zaangażowanego w notację rekurencyjną przejście od ciągów do drzew ternarnych może być zbyt szybkie. Warto byłoby też wyraźniej odróżnić równoważność reprezentacji od syntaktycznej równości rozszerzonych ciągów.

## **Rozdział 3. Heksastrykty**

Rozdział 3 definiuje hekstrastrykty, pokrycia ścieżkowe oraz właściwe pokrycia ścieżkowe, a następnie wiąże te pojęcia z reprezentacją przez ciągi binarne i rozszerzone ciągi binarne. Jest to centralna część rozprawy, ponieważ ustanawia most między geometrią grafową a reprezentacją symboliczną.

Twierdzenie 3.3.2 o istnieniu właściwego pokrycia dla każdego hekstrastruktu jest ważne dla całej pracy. Dowód ma charakter konstrukcyjno-indukcyjny i jest zasadniczo przekonujący. W recenzji zwracam jednak uwagę, że warto podczas obrony doprecyzować, jak procedura wyboru pokrycia zachowuje się w przypadkach niejednoznacznych oraz jaki jest wpływ wyboru pokrycia na wynik agregacji. W rozdziale 3 pojawia się również istotna kwestia jednoznaczności. Autor wskazuje, że każdy ciąg binarny lub rozszerzony ciąg binarny reprezentuje dokładnie jeden hekstrastrukt, ale odwrotność nie jest jednoznaczna: jeden hekstrastrukt może mieć wiele reprezentacji zależnych od początku, orientacji i pokrycia. Jest to naturalne, ale ma znaczenie dla metryk i agregacji, ponieważ porównywanie reprezentacji może nie być tym samym co porównywanie klas równoważności hekstrastruktur. Ten aspekt wymaga silniejszego podkreślenia.

## **Rozdział 4. Algorytmy agregujące hekstrastrykty**

Rozdział 4 zawiera główne wyniki dotyczące porównywania i agregacji. Autor definiuje metrykę dla rozszerzonych ciągów binarnych, analizuje odległość Hamminga, rozszerzoną odległość Hamminga, ważoną wersję tej odległości, odległość Levenshteina, medoid oraz porządki częściowe.

Pozytywnie oceniam samą konstrukcję: przeniesienie porównywania heksastruktur na porównywanie ich reprezentacji jest naturalne i algorytmicznie użyteczne. Wprowadzenie ważenia pozycyjnego jest uzasadnione, ponieważ różnice na wcześniejszych pozycjach ciągu mogą silniej wpływać na geometrię całej struktury.

Najpoważniejsza uwaga dotyczy twierdzenia 4.1.8. Stwierdzenie, że odwzorowanie  $d^*_d$  jest metryką wtedy i tylko wtedy, gdy  $d$  jest metryką, jest bardzo mocne. W tekście bezpośrednio przed twierdzeniem udowodniono własność zerowania, ale samo twierdzenie 4.1.8 nie ma w widocznej wersji pełnego dowodu, szczególnie w zakresie nierówności trójkąta dla rekurencyjnej definicji wykorzystującej minimum. Tezę tę należy w rozprawie albo udowodnić jawnie, albo ograniczyć, albo poprzeć lematem wykazującym stabilność konstrukcji względem nierówności trójkąta.

Dla rozszerzonej i ważonej odległości Hamminga dowody nierówności trójkąta są długie i rachunkowe. W przypadku ważonej odległości Hamminga można zastosować krótsze uzasadnienie przez współrzędnościową sumę ważonych różnic po uzupełnieniu krótszego ciągu symbolem pustym, przy dodatnich wagach.

Część dotycząca porządków jest ciekawa, ale bardziej eksploracyjna. Porządek epaleksykograficzny może być użyteczny, lecz sam Autor wskazuje jego ograniczenia. Warto byłoby wyraźniej napisać, w jakich przypadkach porządki rzeczywiście dają stabilną agregację, a kiedy prowadzą do zbiorów elementów minimalnych lub maksymalnych bez jednoznacznego reprezentanta.

## Rozdział 5. Zastosowania

Rozdział 5 omawia trzy zastosowania: teorię gier i symulacje komputerowe, systemy wieloagentowe i wiedzę rozproszoną oraz chemię organiczną i stereoizomerię. Rozdział jest interesujący i pokazuje, że zaproponowane struktury mogą być interpretowane w różnych kontekstach.

Zastosowanie dotyczące gry Catan jest najbardziej rozwiniętym przykładem praktycznym w pracy. Autor wykorzystuje symulator Catanatron, przygotowuje własne modyfikacje kodu, przeprowadza symulacje oraz agreguje otrzymane heksastruktury. Należy jednak zauważyć, że eksperyment ten ma przede wszystkim charakter studium przypadku potwierdzającego możliwość zastosowania zaproponowanych metod, a nie pełnej walidacji strategii gry. W szczególności brakuje szerszej analizy porównawczej, badania stabilności wyników względem parametrów symulacji oraz formalnej oceny jakości otrzymanych medoidów.

Przykład wiedzy rozproszonej jest zgodny z intuicją agregowania informacji od wielu agentów. Przykład chemiczny jest atrakcyjny ilustracyjnie, ale wymaga ostrożności, ponieważ grafowe modele cząsteczek i stereoizomerii mają własne ograniczenia i nie każda własność chemiczna jest zachowywana przez prostą reprezentację heksastrukturalną.

Rozdział 5 traktuję jako demonstrację możliwych zastosowań, nie jako pełną empiryczną walidację metody. Dla mocniejszej oceny aplikacyjnej potrzebne byłyby eksperymenty

porównawcze, analiza złożoności dla danych rzeczywistych oraz porównanie z alternatywnymi metodami reprezentacji grafów.

## Rozdział 6. Zakończenie

Zakończenie dobrze zbiera główne wyniki pracy. Autor wskazuje, że kluczowym efektem jest reprezentacja heksastruktur za pomocą rozszerzonych ciągów binarnych oraz wykorzystanie tej reprezentacji do porównywania i agregacji. W zakończeniu uczciwie wskazano także pewne ograniczenia, m.in. problem niejednoznaczności medoidu oraz ograniczenia porządku epaleksykograficznego.

Pozytywnie oceniam wskazanie kierunków dalszych badań: rozwój metod agregacji, redukcję złożoności, lepszą analizę struktur chemicznych i powiązania z systemami wieloagentowymi. Pokazuje to świadomość zakresu osiągniętych wyników i ograniczeń obecnej wersji metody.

## Dodatki A i B

Dodatek A zawiera wyniki pokrewne dotyczące współrzędnych wierzchołków, walidacji ciągów binarnych oraz zliczania ścieżek drugiego rzędu na siatce heksagonów. Jest to wartościowy materiał uzupełniający, choć miejscami bardzo techniczny. Tabele z dodatku A są czytelne, ale niektóre wartości i wyróżnienia powinny mieć dokładniejszy komentarz interpretacyjny.

Dodatek B zawiera implementacje w Pythonie. To istotny element pracy doktorskiej w dyscyplinie informatyka. Kod pokazuje, że Autor nie ograniczył się do konstrukcji formalnych, lecz przygotował narzędzia obliczeniowe. Należy jednak poprawić opis językowy dodatku oraz upewnić się, że repozytorium zawiera wersję kodu pozwalającą odtworzyć przykłady i symulacje.

## 2.6. Język i strona formalna rozprawy

Od strony edytorskiej rozprawa jest przygotowana poprawnie. Układ stron, numeracja, spisy i większość rysunków są czytelne. Rysunki dobrze wspierają wywód geometryczny. Strona graficzna pracy jest ogólnie staranna.

Warstwa językowa wymaga jednak korekty. Tekst jest zrozumiały, ale często ciężki stylistycznie. Autor nadużywa słowa „oraz”, co prowadzi do zdań wielokrotnie złożonych i mało naturalnych. Pojawiają się również literówki, błędy fleksyjne oraz niezręczne kalki. Szczegółowe uwagi znajdują się w Tabeli 1.

Tabela 1. Szczegółowe uwagi językowe

| Strona   | Problem   | Sugerowana korekta lub komentarz  |
|----------|---|---|
| 9        | „ze względu na niewielki stopień zgłębienia tematu w literaturze” | Lepiej: „ze względu na stosunkowo słabe rozpoznanie tematu w literaturze” lub „niewielką liczbę opracowań”.               |
| 9        | „Parkietaż stanowi problem polegający na...”                      | Lepiej: „Parkietaż polega na...” albo „Parkietaż jest zagadnieniem polegającym na...”.                                    |
| 11       | „przejsć do definicji właściwej dla tej dysertacji obiektów”      | Lepiej: „przejsć do definicji obiektów właściwych dla tej dysertacji”.  |
| 11       | „budowaniu ścieżek oraz zamków oraz pozyskiwaniu surowców”        | Powtórzenie „oraz”; lepiej: „budowaniu ścieżek i zamków oraz pozyskiwaniu surowców”.                                      |
| 29       | „ze względu na prostą”  | Standardowo: „względem prostej”.  |
| 97       | „kosmologii” w wyliczeniu dziedzin                                | Lepiej: „kosmologia”. W wyliczeniu warto ujednoczyć przypadki: informatyka, matematyka, fizyka, kosmologia, botanika itd. |
| 139      | „Google Colabulatory”   | Powinno być: „Google Colaboratory” lub potocznie „Google Colab”.  |
| 139      | „nie wymaga instalacja środowiska”                                | Powinno być: „nie wymaga instalacji środowiska”.  |
| 139      | „Python ... jest powszechnie wykorzystywane”                      | Powinno być: „Python ... jest powszechnie wykorzystywany”.  |
| 147, 162 | „ogarniczeniem akcji”   | Powinno być: „ograniczeniem akcji”.   |

### 3. PYTANIA I ZAGADNIENIA DO DYSKUSJI PODCZAS OBRONY

1. Jak Doktorant poprawiłby dowód twierdzenia 1.4.6? Czy obecne przejście w dowodzie nie wymaga dodatkowego uzasadnienia, skoro obrót i odbicie nie są na ogół przemienne?
2. Czy dla twierdzenia 4.1.8 istnieje pełny dowód nierówności trójkąta dla metryki rekurencyjnej  $d*_d$ ?
3. Jak wybór właściwego pokrycia ścieżkowego wpływa na wartość metryk i wynik agregacji? Czy można mówić o metryce na samych heksastrukturach, czy jedynie na ich reprezentacjach?
4. Jak rozstrzygana jest niejednoznaczność medoidu w praktycznych zastosowaniach?
5. Jaka jest złożoność obliczeniowa wyznaczania reprezentacji, obliczania metryk oraz agregacji dla dużych heksastruktur?
6. Które z przedstawionych zastosowań zostały zweryfikowane eksperymentalnie, a które mają charakter przykładowy lub ilustracyjny?

#### 4. WNIOSKI I KONKLUZJA KOŃCOWA

Mimo wskazanych usterek rozprawa mgra Grzegorza Mosia stanowi oryginalne opracowanie naukowe. Autor zaproponował nowy sposób reprezentowania i agregowania struktur o geometrii heksagonalnej, wykazał znajomość aparatu matematycznego i informatycznego oraz przygotował implementacje wspierające przedstawione konstrukcje.

W mojej ocenie rozprawa prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną Doktoranta w dyscyplinie informatyka, potwierdza umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej oraz zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego polegającego na reprezentacji, porównywaniu i agregacji heksastruktur. Wskazane braki formalne wymagają wyjaśnienia i korekty, ale nie przekreślają zasadniczego wkładu rozprawy.

**Konkluzja.** Biorąc pod uwagę przedstawioną ocenę, stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr. Grzegorza Mosia pt. „Algorytmy agregujące modele o geometrii heksagonalnej” spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim, w szczególności stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną Kandydata w dyscyplinie informatyka oraz potwierdza jego umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. W związku z tym wnioskuję o przyjęcie rozprawy doktorskiej i dopuszczenie mgr. Grzegorza Mosia do publicznej obrony oraz o kontynuowanie postępowania w sprawie nadania mu stopnia doktora w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie informatyka.