

dr hab. Urszula Bentkowska, prof. UR  
Instytut Informatyki  
Uniwersytet Rzeszowski  
ul. St. Pigoń 1  
35-310 Rzeszów

Rzeszów, 25.05.2026

Recenzja rozprawy doktorskiej  
Mgr Grzegorza Mosia  
z tytułowanej  
*Algorytmy agregujące modele o geometrii heksagonalnej*

Recenzja rozprawy doktorskiej Magistra Grzegorza Mosia, realizowanej pod opieką Prof. dra hab. Michała Baczyńskiego, wykonana została zgodnie z Uchwałą nr 75/2026 Rady Naukowej Instytutu Informatyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach z dnia 23.03.2026.

Rozprawa z dyscypliny naukowej informatyka jest przedstawiona w formie monografii naukowej. Zakres rozprawy jest zgodny z najnowszymi wymaganiami.

**Tematyka i cel pracy, problem badawczy i jego znaczenie**

Badania przedstawione w dysertacji poświęcone są wprowadzeniu i analizie własności nowych metod porównywania oraz agregacji struktur, których kształt oparty jest na siatce heksagonów. Struktura tego typu nazwana została w rozprawie heksastruktem. Ponadto opisane są potencjalne obszary praktycznych zastosowań. Heksastrukt to spójny graf, w którym każda para krawędzi o wspólnym wierzchołku tworzy kąt  $120^\circ$ . Sześciokąt, charakterystyczny dla tych struktur, jest figurą geometryczną obecną w wielu dziedzinach naukowych. W geometrii jest jednym z trzech wielokątów foremnych, które umożliwiają utworzenie parkietażu foremego. Krata sześciokątna jest jedną z pięciu dwuwymiarowych krat Bravaisa ważnych z punktu widzenia zastosowań. Sześciokąt występuje także w chemii oraz fizyce, gdzie związki chemiczne oraz materiały, takie jak benzen czy grafen, przyjmują tę postać. Wiedza rozproszona oraz sieci szkieletowe są zagadnieniami informatycznymi, w których wykorzystuje się wzorzec sześciokąta. Kształty tego typu znajdują również zastosowanie w teorii gier, gdzie tworzą mapy oraz plansze gier. Z tego względu badania nad heksastruktami mają istotne znaczenie nie tylko poznawcze, lecz także aplikacyjne, ponieważ mogą przyczynić się do lepszego zrozumienia ich własności oraz wspierać poszukiwanie nowych obszarów zastosowań.

Wiodącym celem i problemem badawczym podjętym w rozprawie było zaproponowanie nowych metod porównywania i agregacji heksastruktów a także analiza własności tych metod oraz ich potencjalnych praktycznych zastosowań. Bardziej szczegółowe cele Doktorant podał we Wstępie rozprawy. Mianowicie, celem badań było: rozszerzenie pojęcia ciągu binarnego celem reprezentacji rozgałęzionej struktury grafów w sposób prostszy, bez utraty informacji o wizualnej postaci obiektów; wyprowadzenie wzorów na obrót oraz odbicie lustrzane rozważanych struktur z wykorzystaniem rozszerzonych ciągów binarnych; zdefiniowanie metryk pozwalających na miarę podobieństwa rozważanych grafów; agregacja struktur poprzez zastosowanie otrzymanych metryk w konstrukcji medoidu oraz centroidu; zbadanie możliwości wykorzystania częściowego porządku do agregacji rozszerzonych ciągów binarnych; zaproponowanie zastosowań otrzymanych metod agregacji w różnych dziedzinach nauki; zaimplementowanie rozszerzonych ciągów binarnych w postaci obiektów oraz otrzymanych metryk i metod agregacji w postaci funkcji w języku Python.

*Bentkowska*

Oceniając tematykę badawczą podjętą w rozprawie, należy uznać, że dotyczy ona aktualnych problemów istotnych dla rozwoju dyscypliny informatyka.

## Charakterystyka rozprawy

Rozprawa składa się z dwóch głównych części. W pierwszej części, która stanowi zasadniczy komponent rozprawy, w którym przedstawiono główne wyniki badań, znajduje się wstęp oraz sześć numerowanych rozdziałów. Drugą część pracy stanowią dwa rozdziały dodatkowe, w których zawarte zostały wyniki pokrewne oraz implementacje w języku Python. Na końcu pracy znajduje się bibliografia zawierająca 49 pozycji literatury oraz skorowidze rysunków, implementacji, symboli i nazw.

We Wstępie nakreślona została idea pojęcia heksastruktu oraz ogólna problematyka badań podjętych w ramach pracy a także wskazane zostały obszary zastosowań struktur, których kształt oparty jest na siatce heksagonu. Bardzo szczegółowo zostały podane cele badawcze. Wskazane zostały prace, w których Doktorant opublikował wyniki badań zawarte w rozprawie oraz konferencje, na których wyniki tych badań były prezentowane. Podano także opis zawartości poszczególnych rozdziałów pracy.

W Rozdziale 1 (*Podstawowe zagadnienia matematyczne*) zaprezentowana została teoria z zakresu geometrii oraz zbiorów częściowo uporządkowanych. Zdefiniowanie precyzyjnie omawiane pojęcia oraz zbadano ich własności. Teoria omówiona w tym rozdziale została opracowana szczegółowo, co umożliwiło zrozumienie wyników w pozostałej części rozprawy. Warto zwrócić uwagę, że w Rozdziale 1, którego rolą podanie jest zagadnień pomocniczych do rozwiązania głównego problemu, znajdują się dwa twierdzenia z autorskimi dowodami Doktoranta (Twierdzenie 1.2.1 oraz Twierdzenie 1.3.1).

W Rozdziale 2 (*Rozszerzone ciągi binarne*), wprowadzono nowe pojęcie rozszerzonego ciągu binarnego, które rozszerza pojęcie ciągu binarnego o możliwość wtrącenia nowego ciągu binarnego pomiędzy bity istniejącego już ciągu binarnego. Tak zdefiniowane nowe pojęcie ułatwia reprezentację docelowo badanych obiektów w sposób prostszy do prezentacji a także umożliwia zastosowanie nowego rodzaju metod porównawczych.

W Rozdziale 3 (*Heksastrykty*), zdefiniowano wybrane pojęcia z teorii grafów a następnie podana została kluczowa definicja dla dysertacji, mianowicie definicja heksastruktu. Następnie ustalona została forma pokryć ścieżkowych heksastruktów, umożliwiającą wykorzystanie jej do reprezentacji przy użyciu ciągów binarnych oraz rozszerzonych ciągów binarnych.

W Rozdziale 4 (*Algorytmy agregujące heksastrukty*), wyprowadzona została metryka dla rozszerzonych ciągów binarnych bazująca na definicji metryki dla ciągów binarnych. Tak wprowadzona metryka została zaimplementowana w równaniach opisujących medoid oraz centroid, co umożliwiło badanie użyteczności istniejących oraz nowych metryk dla procesu agregacji.

W Rozdziale 5 (*Zastosowania*), zaproponowano i szeroko opisano wykorzystanie otrzymanych metod agregacji w trzech obszarach. Pierwsze zastosowanie dotyczy teorii gier, gdzie poszukiwana jest strategia wygrywająca w grze planszowej Catan (plansza tej gry jest utworzona z sześciokątów). Kolejne zastosowanie dotyczy inżynierii agentowej, gdzie wiedza rozproszona jest agregowana w celu otrzymania informacji o rozważanej przestrzeni. Rozpatrywany jest zbiór heksastruktów, który odpowiada wiedzy pewnej grupy agentów, która jest agregowana w celu określenia ogólnych własności. Ostatnie zastosowanie dotyczy chemii organicznej oraz stereoizomerii. Pokazano, że wiele węglowodorów można reprezentować, porównywać oraz agregować metodami przedstawionymi w dysertacji.

W Rozdziale 6 (*Zakończenie*), podsumowane zostały otrzymane wyniki badań oraz opisane ich dalsze kierunki.

Dodatek A (*Wyniki pokrewne*), zawiera rezultaty, które pośrednio są związane z agregacją heksastruktów. Przedstawiono nowe i optymalne metody obliczania współrzędnych w siatce sześciokątów a także sześciokątny układ współrzędnych. Rozpatrywane było zagadnienie walidacji ciągów binarnych w kontekście reprezentacji heksastruktów, co jest powiązane z problemem zliczania heksastruktów o określonej długości.

*Bentler*

Dodatek B (*Implementacje w języku Python*), opisuje implementacje w języku Python, które dotyczą rozszerzonych ciągów binarnych, metryk, porządków i metod agregacji.

Podsumowując, praca jest napisana jasnym i poprawnym językiem naukowym. Struktura rozprawy jest logiczna.

## Opinia o rozprawie

Przedstawione w rozprawie wyniki stanowią spójny i logicznie skonstruowany cykl badań poświęconych nowym metodom porównywania i agregacji struktur, których kształt oparty jest na siatce heksagonów. Wynikiem tych operacji jest również graf o heksagonalnej strukturze. Graf o takiej strukturze został nazwany heksastruktem. W pracy pokazane są także potencjalne zastosowania otrzymanych rezultatów.

Istotnym wynikiem badań jest przedstawienie heksastruktów przy pomocy rozszerzonych ciągów binarnych. Pozwala to na odtworzenie rozważanych grafów oraz ułatwia ich porównywanie i agregację. Twierdzenie 3.3.2 mówi, że dla każdego heksastruktów istnieje co najmniej jedno pokrycie właściwe (pokrycie to otrzymywane jest przez utworzenie pokrycia ścieżkowego będącego drzewem binarnym). Reprezentując rekurencyjnie każdą ścieżkę heksastruktów ciągiem binarnym (Twierdzenie 3.4.1), można reprezentować heksastrukt o danym właściwym pokryciu ścieżkowym rozszerzonym ciągiem binarnym. Każdy ciąg binarny lub rozszerzony ciąg binarny reprezentuje dokładnie jeden heksastrukt, a przekształcenie rozważanego ciągu w heksastrukt polega na obliczaniu kolejnych współrzędnych wierzchołków heksastruktów z uwzględnieniem kątów  $\pm 120^\circ$ . Dzięki temu istotne założenie celu rozprawy zostało osiągnięte, gdyż informacja o strukturze grafu podczas jego reprezentacji ciągami binarnymi lub rozszerzonymi ciągami binarnymi nie zostaje utracona.

W główny nurt badań pracy wpisują się rezultaty zaprezentowane w Rozdziale 4, czyli zdefiniowanie metryki dla rozszerzonych ciągów binarnych oraz zaproponowanie porównywania rozszerzonych ciągów binarnych z wykorzystaniem częściowych porządków. Metryka odległości Hamminga została rozszerzona na ciągi binarne dowolnej długości. Ponadto została wprowadzona funkcja ważąca różnicę między dwoma porównywanymi ciągami na poszczególnych ich pozycjach. Poszerzona postać metryki odległości Hamminga pozwala na uwzględnienie różnic między heksastruktami, gdzie różnica na początkowych pozycjach ma dużo większy wpływ na różnice między obiektami niż różnica na końcowych indeksach. Dodatkowo, ze względu na swoje własności, rozważona była też metryka odległości Levenshteina a obydwie metryki przeanalizowane zostały w praktycznym zastosowaniu do agregowania ścieżek w symulatorze Catanatron, szerzej opisanym w Rozdziale 5. Do porównania rozszerzonych ciągów binarnych zastosowany został znany porządek leksykograficzny oraz wprowadzony został przez Doktoranta nowy porządek nazwany porządkiem epaleksykograficznym. Porządek ten umożliwia najpierw porównanie, który z rozważanych heksastruktów ma więcej par kątów znajdujących się po tej samej stronie krawędzi, a następnie korzysta z porządku leksykograficznego. Pozwala to na zbadanie większej ilości różnic w strukturze heksastruktów niż porządek leksykograficzny, jednak dzieje się to kosztem zwiększenia się liczby nieporównywalnych par heksastruktów. Obydwa porządki zostały zastosowane w Rozdziale 5 do agregacji heksastruktów reprezentujących wiedzę rozproszoną.

Dopełnieniem całości jest Rozdział 5, w którym omówione zostały trzy problemy badawcze o wysokim potencjale praktycznego zastosowania heksastruktów oraz przedstawionych w dysertacji metod ich porównywania i agregacji. Jednak Doktorant nadmienia, że kształt ten pojawia się, a tym samym istnieje możliwość wykorzystania agregacji heksastruktów w następujących dziedzinach: informatyka, matematyka, fizyka ciała stałego, kosmologia, botanika, nauki o Ziemi, geofizyka, zoologia. Doktorant szczegółowo przeanalizował użyteczność zaproponowanych metryk odległości oraz porządków w zagadnieniach takich jak teoria gier i symulacje komputerowe oraz wiedza rozproszona. Natomiast odwzorowania wprowadzone w Rozdziale 2 dysertacji mogą być zastosowane w chemii organicznej oraz stereoizomerii. Na uwagę zasługuje fakt, że kod źródłowy wszystkich

*Barthor*

opracowanych metod został udostępniony publicznie w repozytorium GitHub. Praktyka ta, zgodna z postulatami *open science*, podnosi wartość uzyskanych w ramach rozprawy wyników, umożliwiając innym naukowcom weryfikację uzyskanych wyników oraz dalszy rozwój zaproponowanych metod.

Autor nie ogranicza swoich analiz do głównej tematyki rozprawy, lecz w Dodatku A przedstawia wyniki pochodnych problemów, które pojawiły się w trakcie badań. Zaprezentowane są wyniki dotyczące wyznaczania współrzędnych wierzchołków heksastruktów oraz zliczania heksastruktów o określonej długości, przy uwzględnieniu niezmienniczości względem odbić lustrzanych oraz obrotów. Pozwala to wyeliminować powtarzające się przypadki i uzyskać bardziej precyzyjne statystyki dotyczące klasyfikacji tych struktur. W Dodatku B, Doktorant omawia implementacje narzędzi przedstawionych w dysertacji z opisem ich zaprojektowania oraz działania. Wskazane są też zalety wybranych rozwiązań pod względem optymalizacyjnym. Kod przygotowywany został w Google Colab z użyciem języka Python. Doktorant ma także wizję dalszych kierunków badań w zakresie tematyki rozprawy doktorskiej, o czym pisze w Zakończeniu rozprawy.

Po analizie przedłożonej rozprawy nie stwierdzam obecności błędów merytorycznych. Zastosowane metody badawcze są adekwatne do postawionych celów naukowych, a przyjęte w pracy podejścia do przetwarzania danych wskazują na dobrą znajomość przez Doktoranta nowoczesnych i efektywnych narzędzi stosowanych w informatyce.

Uważam, że przedłożona dysertacja stanowi spójne opracowanie wyników przeprowadzonych badań, przedstawionych w sposób przejrzysty i logicznie uporządkowany. Podejmowana problematyka wpisuje się w aktualne trendy badawcze. Rozprawa zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego w dyscyplinie informatyka.

### **Wiedza i umiejętność prowadzenia badań**

Uważam, że Kandydat posiada dużą wiedzę ogólną z zakresu dyscypliny informatyka. W przedłożonej rozprawie korzystał z różnych metod badawczych wykazując się biegłością w stosowaniu różnych narzędzi z zakresu matematyki i informatyki. Kandydat wykazał się umiejętnością samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

### **Uwagi**

W tym miejscu recenzji podam kilka drobnych uwag krytycznych i zadam pytanie do dyskusji. Na wstępie jednak zaznaczam, że problematyka podjęta przez Doktoranta należy do zagadnień o istotnym znaczeniu naukowym i znacznym stopniu trudności. Uwagi przedstawione poniżej nie stanowią podstawy do obniżenia ogólnej, pozytywnej oceny pracy.

Rozprawa doktorska jest napisana bardzo starannie. Znalazłam jedynie kilka usterek dotyczących zapisu wzorów czy przyjętych oznaczeń. Mianowicie, oznaczenie liczb rzeczywistych w Rozdziale 1, na str. 15 jest niespójne z oznaczeniami stosowanymi dla tego zbioru liczbowego w pozostałej części pracy. Na str. 20 w ostatniej linii jest drobna usterka w zapisie – powinno być „kąt  $\gamma$  utworzony przez punkty  $p_1$ ,  $p$  i  $(x_1, y)$ ”. Na str. 24, w drugiej linii od góry, brak jest nawiasu zamykającego. Formalna definicja pojęcia heksastruktów umieszczona jest na str. 57 rozprawy podczas, gdy w podpisie Rysunku 1.5 pojawia się już wcześniej pojęcie heksastruktów na str. 25. Definicja złożoności ciągów binarnych oraz rozszerzonych ciągów binarnych na str. 39 mogłaby zostać ubogacona rysunkiem wizualizującym przyjęte podejście lub opisem podającym intuicję idącą za podaną definicją. Poza tym, w rozprawie można znaleźć nieliczne drobne błędy językowe czy literówki.

Bibliografia obejmuje 49 pozycji literatury. Uważam, że można byłoby ubogacić ten spis o szerszy przegląd publikacji naukowych z zakresu porównywania oraz agregacji struktur. Pozwoliłoby to na pełniejsze umiejscowienie badań Doktoranta w bieżącym stanie wiedzy. Stosownym miejscem do zacytowania tych prac jest według mnie trzeci akapit we Wstępie rozprawy. Zgadzam się ze

*Beata*

stwierdzeniem podanym przez Doktoranta w pierwszym akapicie Wstępu: „(...) niewielki stopień zgłębienia tematu w literaturze (...)”. Faktycznie mało jest prac w tematyce poruszanej w rozprawie doktorskiej. Uważam jednak, że warto byłoby zacytować istniejące prace naukowe z zakresu agregacji struktur. Przykładowo w publikacji:

R. Pérez-Fernández, B. De Baets, Aggregation Theory Revisited, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 29, no. 4, pp. 797-804, April 2021, doi: 10.1109/TFUZZ.2020.2965904

proponowane jest szersze spojrzenie na agregację niż typowe podejścia najczęściej spotykane w literaturze.

Chciałabym w tym miejscu zadać Doktorantowi pytanie – jak wyniki badań przedstawionych w Pana rozprawie doktorskiej wpisują się w koncepcje prezentowane w powyższej publikacji naukowej.

## Wnioski końcowe

Stwierdzam, że przedłożona mi do recenzji rozprawa, której Autorem jest Mgr Grzegorz Moś, rozwiązuje aktualny problem naukowy, przyczyniając się do rozwoju dyscypliny informatyka. Moim zdaniem **recenzowana rozprawa zdecydowanie spełnia wymagania ustawowo stawiane rozprawom doktorskim**. W szczególności spełnione są trzy podstawowe kryteria:

- A. Rozprawa zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego.
- B. Kandydat posiada ogólną wiedzę teoretyczną w dyscyplinie informatyka.
- C. Kandydat posiada umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

Biorąc pod uwagę opinie zaprezentowane w poprzednich punktach oraz wymagania określone przez art. 187 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* (Dz.U. z 2022 r. poz. 574 z późn. zm.) wnoszę do Wysokiej Rady Naukowej Instytutu Informatyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach o dopuszczenie Magistra Grzegorza Mosia do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Urszula Bentkowska

