

ZBIORY PODSUM SZEREGÓW LICZBOWYCH ZBIEŻNYCH

Streszczenie

Gdy $\sum_n x_n$ jest szeregiem zbieżnym bezwarunkowo w przestrzeni Banacha, to zbiór

$$A(x_n) := \left\{ \sum_{n \in A} x_n : A \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

jest poprawnie określony i nazywamy go *zbiorem podsum* (ang. *set of subsums*) lub *zbiorem osiągalnym* (ang. *achievement set*) ciągu (x_n) (lub szeregu $\sum_n x_n$). Zbiór podsum szeregu zbieżnego bezwzględnie na prostej rzeczywistej ma jedną z czterech postaci: zbiór skończony, skończona suma przedziałów domkniętych, zbiór Cantora lub M-Cantorval. Z kolei suma algebraiczna dwóch jednorodnych zbiorów Cantora ma jedną z pięciu postaci: przedział domknięty, zbiór Cantora, L-Cantorval, R-Cantorval lub M-Cantorval. Te dwa fakty służą m.in. jako motywacja do studiowania Cantorwali. Cantorvale to zwarte regularnie domknięte podzbiory prostej, które łączą cechy zbioru Cantora oraz przedziału. W rozdziale pierwszym omawiam wyniki mojej publikacji współautorskiej:

[I] W. Bielas, M. Kula, Sz. Plewik. *On compact subsets of the reals*. Topology Appl. 346, Paper No. 108854 (2024), 10 s.

Dowodzimy charakteryzacji zwartych przestrzeni metrycznych, które topologicznie zanurzają się w prostą. Stosujemy ją do dowodu warunków równoważnych, aby przestrzeń topologiczna była homeomorficzna z M-Cantorvalem bądź L-Cantorvalem. Korzystając z własności przeliczalnych przestrzeni liniowo uporządkowanych, podajemy dowody, że dowolne dwa M-Cantorvale są homeomorficzne i dowolne dwa specjalne L-Cantorvale są homeomorficzne. Używając twierdzenia Mazurkiewicza–Sierpińskiego o ilości niehomeomorficznych podprzestrzeni liczb wymiernych, dowodzimy, że istnieje continuum wiele niehomeomorficznych L-Cantorwali.

Jednym z podstawowych zagadnień w temacie zbiorów podsum są kryteria pozwalające stwierdzić o postaci topologicznej zbioru podsum pochodzącego od danego szeregu. Na prostej rzeczywistej ten problem można sprowadzić do szeregów o wyrazach dodatnich uporządkowanych malejąco. Tak zwane nierówności Kakeyi, czyli zależności między wyrazami a resztami szeregu, pozwalają rozstrzygnąć o postaci topologicznej zbioru podsum, ale nie we wszystkich przypadkach. Znane kryteria nie zawsze dają odpowiedź, czy dany zbiór podsum jest zbiorem Cantora czy M-Cantorvalem. W roz-

dziale drugim prezentuję dotychczas nieopublikowane wyniki pracy wspólnej z Szymonem Głabem. Po omówieniu znanych własności zbiorów podsum w ogólnym zakresie, zajmujemy się tzw. zbiorami samopodobnymi

$$E(\Sigma, q) := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i q^i : (\sigma_i) \in \Sigma^{\mathbb{N}} \right\},$$

gdzie $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem skończonym oraz $q \in (0, 1)$. To pojęcie jest uogólnieniem zbioru podsum pochodzącego od ciągu multigeometrycznego, czyli ciągu postaci

$$(p_1, \dots, p_n; q) := (p_1 q, \dots, p_n q, p_1 q^2, \dots, p_n q^2, \dots),$$

gdzie $p_1, \dots, p_n$ to liczby rzeczywiste, zaś $q \in (0, 1)$. Nasz wspólny wynik dotyczy charakteryzacji, kiedy zbiór $E\left(\Sigma, \frac{1}{|\Sigma|}\right)$ zawiera przedział. Pod pewnymi założeniami można go stosować do sprawdzania postaci topologicznej zbiorów podsum szeregów multigeometrycznych.

Rozdział trzeci dotyczy zbiorów podsum na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Prezentuję wyniki publikacji:

- [II] M. Kula, P. Nowakowski. *Achievement sets of series in $\mathbb{R}^2$* . Results Math. 79 no. 6, Paper No. 221 (2024), 24 s.

Podajemy przykłady zbiorów podsum o różnej postaci topologicznej, w szczególności zajmujemy się różnymi możliwymi składowymi spójności. Dowodzimy istnienia szeregu o zbiorze podsum, którego cięcie jest z góry zadany zbiorem P-sum. Stosujemy ten wynik do konstrukcji kontrprzykładu na hipotezę, że każdy zbiór podsum w $\mathbb{R}^2$ z dokładnością do homeomorfizmu jest skończoną sumą produktów zbiorów podsum z $\mathbb{R}$.

Centrum dystansów (ang. *center of distances*) jest ważnym narzędziem w badaniu zbiorów podsum. Dla przykładu, to pojęcie jest stosowane w dowodach o niemożliwości przedstawienia danego zbioru jako zbioru podsum pewnego szeregu. W rozdziale czwartym pozytywnie odpowiadam na pytanie Małgorzaty Filipczak, czy każdy zbiór dopuszczalny jest centrum dystansów pewnego podzbioru prostej rzeczywistej. Następnie wzmacniam ten rezultat przez pokazanie, że rzeczony podzbiór można dodatkowo dobrać tak, żeby był zbiorem Bernsteina. Te wyniki są opublikowane w artykule:

- [III] M. Kula. *Center of distances and Bernstein sets*. Real Anal. Exchange, Advance Publication 1 – 6 (2025). <https://doi.org/10.14321/realanalexch.1739330962>