

UNIwersytet Śląski w Katowicach

Wydział Nauk Ścisłych i Technicznych

Instytut Matematyki

MATEUSZ KULA

ZBIORY PODSUM SZEREGÓW
LICZBOWYCH ZBIEŻNYCH

Praca doktorska

Promotor:
prof. dr hab. Szymon Plewik

Promotor pomocniczy:
dr Wojciech Bielas

KATOWICE, 2025

Streszczenie

Gdy $\sum_n x_n$ jest szeregiem zbieżnym bezwarunkowo w przestrzeni Banacha, to zbiór

$$A(x_n) := \left\{ \sum_{n \in A} x_n : A \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

jest poprawnie określony i nazywamy go *zbiorem podsum* (ang. *set of subsums*) lub *zbiorem osiągalnym* (ang. *achievement set*) ciągu (x_n) (lub szeregu $\sum_n x_n$). Zbiór podsum szeregu zbieżnego bezwzględnie na prostej rzeczywistej ma jedną z czterech postaci: zbiór skończony, skończona suma przedziałów domkniętych, zbiór Cantora lub M-Cantorval. Z kolei suma algebraiczna dwóch jednorodnych zbiorów Cantora ma jedną z pięciu postaci: przedział domknięty, zbiór Cantora, L-Cantorval, R-Cantorval lub M-Cantorval. Te dwa fakty służą m.in. jako motywacja do studiowania Cantorwali. Cantorvale to zwarte regularnie domknięte podzbiory prostej, które łączą cechy zbioru Cantora oraz przedziału. W rozdziale pierwszym omawiam wyniki mojej publikacji współautorskiej:

- [I] W. Bielas, M. Kula, Sz. Plewik. *On compact subsets of the reals*. Topology Appl. 346, Paper No. 108854 (2024), 10 s.

Dowodzimy charakteryzacji zwartych przestrzeni metrycznych, które topologicznie zanurzają się w prostą. Stosujemy ją do dowodu warunków równoważnych, aby przestrzeń topologiczna była homeomorficzna z M-Cantorwalem bądź L-Cantorwalem. Korzystając z własności przeliczalnych przestrzeni liniowo uporządkowanych, podajemy dowody, że dowolne dwa M-Cantorvale są homeomorficzne i dowolne dwa specjalne L-Cantorvale są homeomorficzne. Używając twierdzenia Mazurkiewicza–Sierpińskiego o ilości niehomeomorficznych podprzestrzeni liczb wymiernych, dowodzimy, że istnieje continuum wiele niehomeomorficznych L-Cantorwali.

Jednym z podstawowych zagadnień w temacie zbiorów podsum są kryteria pozwalające stwierdzić o postaci topologicznej zbioru podsum pochodzącego od danego szeregu. Na prostej rzeczywistej ten problem można sprowadzić do szeregów o wyrazach dodatnich uporządkowanych malejąco. Tak zwane nierówności Kakeyi, czyli zależności między wyrazami a resztami szeregu, pozwalają rozstrzygnąć o postaci topologicznej zbioru podsum, ale nie we wszystkich przypadkach. Znane kryteria nie zawsze dają odpowiedź, czy dany zbiór podsum jest zbiorem Cantora czy M-Cantorwalem. W rozdziale drugim prezentuję dotychczas nieopublikowane wyniki pracy wspólnej z Szymonem Głębem. Po omówieniu znanych własności zbiorów podsum w ogólnym zakresie,

zajmujemy się tzw. zbiorami samopodobnymi

$$E(\Sigma, q) := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i q^i : (\sigma_i) \in \Sigma^{\mathbb{N}} \right\},$$

gdzie $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem skończonym oraz $q \in (0, 1)$. To pojęcie jest uogólnieniem zbioru podsum pochodzącego od ciągu multigeometrycznego, czyli ciągu postaci

$$(p_1, \dots, p_n; q) := (p_1 q, \dots, p_n q, p_1 q^2, \dots, p_n q^2, \dots),$$

gdzie $p_1, \dots, p_n$ to liczby rzeczywiste, zaś $q \in (0, 1)$. Nasz wspólny wynik dotyczy charakteryzacji, kiedy zbiór $E\left(\Sigma, \frac{1}{|\Sigma|}\right)$ zawiera przedział. Pod pewnymi założeniami można go stosować do sprawdzania postaci topologicznej zbiorów podsum szeregów multigeometrycznych.

Rozdział trzeci dotyczy zbiorów podsum na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Prezentuję wyniki publikacji:

- [II] M. Kula, P. Nowakowski. *Achievement sets of series in $\mathbb{R}^2$* . Results Math. 79 no. 6, Paper No. 221 (2024), 24 s.

Podajemy przykłady zbiorów podsum o różnej postaci topologicznej, w szczególności zajmujemy się różnymi możliwymi składowymi spójności. Dowodzimy istnienia szeregu o zbiorze podsum, którego cięcie jest z góry zadany zbiorem P-sum. Stosujemy ten wynik do konstrukcji kontrprzykładu na hipotezę, że każdy zbiór podsum w $\mathbb{R}^2$ z dokładnością do homeomorfizmu jest skończoną sumą produktów zbiorów podsum z $\mathbb{R}$.

Centrum dystansów (ang. *center of distances*) jest ważnym narzędziem w badaniu zbiorów podsum. Dla przykładu, to pojęcie jest stosowane w dowodach o niemożliwości przedstawienia danego zbioru jako zbioru podsum pewnego szeregu. W rozdziale czwartym pozytywnie odpowiadam na pytanie Małgorzaty Filipczak, czy każdy zbiór dopuszczalny jest centrum dystansów pewnego podzbioru prostej rzeczywistej. Następnie wzmacniam ten rezultat przez pokazanie, że rzeczony podzbiór można dodatkowo dobrać tak, żeby był zbiorem Bernsteina. Te wyniki są opublikowane w artykule:

- [III] M. Kula. *Center of distances and Bernstein sets*. Real Anal. Exchange, Advance Publication 1 – 6 (2025). <https://doi.org/10.14321/realanalexch.1739330962>

Abstract

If $\sum_n x_n$ is an unconditionally convergent series in a Banach space, then the set

$$A(x_n) := \left\{ \sum_{n \in A} x_n : A \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

is well defined and we call it the *set of subsums* or the *achievement set* of sequence (x_n) (or series $\sum_n x_n$). The set of subsums of an absolutely convergent series on the real line has one of the following forms: a finite set, a finite union of closed intervals, a Cantor set of an M-Cantorval. In turn, an algebraic sum of two homogeneous Cantor sets has one of the following forms: a closed interval, a Cantor set, an L-Cantorval, an R-Cantorval or an M-Cantorval. These facts serve as motivation to study Cantorvals. Cantorvals are compact regularly closed subsets of the line, which combine the properties of the Cantor set and the interval. In chapter one I report the result of my co-authored publication:

[I] W. Bielas, M. Kula, Sz. Plewik. *On compact subsets of the reals*. Topology Appl. 346, Paper No. 108854 (2024), 10 p.

We prove the characterization of compact metric spaces that can be topologically embedded into the line. We use it to prove equivalent conditions for the space to be homeomorphic with M-Cantorval or L-Cantorval. Using the properties of countable linearly ordered spaces, we give proofs that any two M-Cantorvals are homeomorphic and any two special L-Cantorvals are homeomorphic. Using Mazurkiewicz–Sierpiński theorem on the number of non-homeomorphic subspaces of rationals, we prove that there exist continuum many non-homeomorphic L-Cantorvals.

One of the fundamental questions concerning sets of subsums are criteria for determining the topological form of the set of subsums of a particular series. On the real line this problem is reduced to series of positive terms in descending order. The so-called *Keakeya inequalities*, i.e. relationships between the terms and remainders of the series, allow to decide the topological form of the set of subsum, but not in all cases. Known criteria do not always provide an answer as to whether a given set of subsums is a Cantor set or an M-Cantorval. In chapter two I present thus far unpublished result of joint work with Szymon Głąb. After discussing known properties of sets of subsums in general, we deal with the self-similar sets

$$E(\Sigma, q) := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i q^i : (\sigma_i) \in \Sigma^{\mathbb{N}} \right\},$$

where $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ is a finite set and $q \in (0, 1)$. This notion is a generalization of the set of subsums of multigeometric sequence, which is the sequence of the form

$$(p_1, \dots, p_n; q) := (p_1q, \dots, p_nq, p_1q^2, \dots, p_nq^2, \dots),$$

where $p_1, \dots, p_n$ are real numbers and $q \in (0, 1)$. Our joint result is a new characterization, when the set $E\left(\Sigma, \frac{1}{|\Sigma|}\right)$ contains an interval. Under some assumptions it can be used to determine the topological form of the set of subsums of multigeometric series.

Chapter three concerns sets of subsums on the plane $\mathbb{R}^2$. I present the results of the publication:

- [II] M. Kula, P. Nowakowski. *Achievement sets of series in $\mathbb{R}^2$* . Results Math. 79 no. 6, Paper No. 221 (2024), 24 p.

We give examples of sets of subsums of various topological form, in particular we deal with different possible connected components. We prove the existence of a series whose set of subsums has a cut that is a given set of P-sums. We use this result to construct a counterexample to the conjecture that any set of subsums in $\mathbb{R}^2$ up to homeomorphism is a finite union of products of sets of subsums in $\mathbb{R}$.

The center of distances is an important tool in studying sets of subsums. For example, this notion is used in proofs that some set cannot be represented as a set of subsums of any series. In chapter four I give a positive answer to Małgorzata Filipczak's question, whether any set $A \subseteq [0, \infty)$ with $0 \in A$ is a center of distances of some subset of the real line. Then I strengthen this result by showing that such subset can be in addition chosen to be a Bernstein set. These results are published in the article:

- [III] M. Kula. *Center of distances and Bernstein sets*. Real Anal. Exchange, Advance Publication 1 – 6 (2025), <https://doi.org/10.14321/realanalexch.1739330962>

Podziękowania

Przede wszystkim dziękuję mojemu promotorowi prof. Szymonowi Plewikowi za przyjęcie mnie do swojej grupy i umożliwienie pracowania nad tym doktoratem. Dziękuję za tolerowanie mojego charakteru, wiarę i docenienie mnie. Dziękuję całej mojej grupie badawczej *Zagadnienia mnogościowe w topologii*, w szczególności mojemu promotorowi pomocniczemu dr. Wojciechowi Bielasowi. Dziękuję za pomoc merytoryczną i dyskusje, które zaowocowały m.in. publikacjami. Dziękuję za okazaną życzliwość, cenne rady, inspirację i poświęcony czas.

Spis treści

Wstęp	7
1 Zwarte podzbiory prostej	9
1.1 Cantorvale	16
1.2 Niehomeomorficzne L-Cantorvale	21
2 Zbiory podsum	24
2.1 Ciągi multigeometryczne oraz zbiory samopodobne	27
3 Zbiory podsum na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$	52
4 Centrum dystansów	58
4.1 Zbiory Bernsteina a centrum dystansów	61
Bibliografia	63

Wstęp

W rozprawie przedstawiam wybrane wyniki dotyczące zbiorów podsum (ang. *sets of subsums*) lub inaczej zbiorów osiągalnych (ang. *achievement sets*), głównie w kontekście topologii prostej rzeczywistej. Zainteresowałem się tym tematem za namową promotora Szymona Plewika. Ta tematyka w ostatnich latach zyskała popularność m.in. w gronie matematyków związanych z Uniwersytetem Łódzkim; są to np. Artur Bartoszewicz, Małgorzata Filipczak, Grażyna Horbaczewska i Piotr Nowakowski. Inni autorzy, z którymi także miałem okazję współpracować, to Szymon Głąb, Jacek Marchwicki oraz Franciszek Prus-Wiśniowski.

Punktem wyjścia i inspiracją dla mnie były Cantorvale. Słowo Cantorval to neologizm oznaczający zwarty podzbiór prostej rzeczywistej, który łączy cechy zbioru Cantora oraz przedziału. Za przykładem rozprawy doktorskiej [43] zdecydowałem się na pozostanie przy angielskiej pisowni. Cantorvale pojawiają się w naturalny sposób jako zbiory podsum szeregów zbieżnych bezwzględnie lub sumy algebraiczne zbiorów Cantora. Wyniki artykułu [6] omawiane w rozdziale pierwszym dotyczą w dużej mierze Cantorwali, chociaż są tylko pośrednio związane ze zbiorami podsum.

W rozdziale pierwszym przedstawiam dowód wewnętrznej charakteryzacji zwartych podzbiorów prostej, nieznacznie inny niż ten zamieszczony w artykule [6], którego jestem współautorem. Zmiana polega na zastosowaniu metody granicy odwrotnej, w szczególności techniki opisanej w lemacie 1.4. Rezultaty publikacji [6] były bazą dla dalszych badań opisanych w tej rozprawie.

W trakcie planowych zajęć Szkoły Doktorskiej wspólnie z Szymonem Głąbem analizowaliśmy artykuł R. Kenyona [22]. Interesowały nas w szczególności zbiory samopodobne jako warianty zbiorów podsum. Własności zbiorów podsum w ogólnym zakresie są wyczerpująco opisane w innych publikacjach, patrz np. [4] lub [33]. Fakty 2.1–2.5 oraz twierdzenie 2.6 są dobrze znane, dlatego w rozdziale drugim omawiam je skrótowo. Począwszy od sekcji 2.1 omawiam wyniki bardziej szczegółowe będące uogólnieniem rezultatów z [22]. Dotyczą one charakteryzacji zbiorów podsum szeregów multigeometrycznych przy dodatkowych założeniach. Główny wynik jest opisany przez twierdzenie 2.21. Zawartość tej sekcji planujemy dopiero opublikować, a przyszłej publikacji będę

współautorem.

Zagadnienie zbiorów podsum na płaszczyźnie i w dowolnych przestrzeniach Banacha należy do mało zbadanych. W artykule [26] wspólnie z Piotrem Nowakowskim podejmujemy się zebrania dotychczas znanych faktów. Dowodzimy też nowego twierdzenia, które pozwala skonstruować zbiór podsum na płaszczyźnie o cięciu będącym zadany zbiorem P-sum. Wnioskiem jest, że istnieje zbiór podsum w $\mathbb{R}^2$, który nie jest skończoną sumą produktów jednowymiarowych zbiorów podsum. Te wyniki opisuję w rozdziale trzecim.

Ważnym narzędziem w badaniu zbiorów podsum stało się centrum dystansów (ang. *center of distances*) wprowadzone w artykule [7]. Pojęcie to z czasem stało się interesujące samo w sobie, patrz np. [3]. W artykule [25] pozytywnie odpowiadam na pytanie Małgorzaty Filipczak o suriektywność operatora centrum dystansów, a następnie wzmacniam ten rezultat przez pokazanie, że każdy zbiór dopuszczalny jest centrum dystansów pewnego zbioru Bernsteina.

Na ogół stosujemy standardowe oznaczenia. Liczby naturalne $\mathbb{N}$ numerujemy od 1. Gdy A jest zbiorem, to symbol $A^{\mathbb{N}}$ oznacza zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wartościach w A , zaś symbol A^n , gdzie $n \in \mathbb{N}$, oznacza zbiór ciągów o wartościach w A i dziedzinie $\{1, \dots, n\}$, czyli ciągów skończonych długości n . W szczególności, symbole $2^{\mathbb{N}}$ oraz 2^n oznaczają zbiory ciągów o wartościach w $2 = \{0, 1\}$. Gdy $s = (s_1, \dots, s_n)$ oraz $t = (t_1, \dots, t_m)$ są ciągami skończonymi, to $s \frown t = (s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m)$ jest to tzw. konkatenacja ciągów s oraz t . Symbol $|A|$ oznacza moc zbioru A . Moc zbioru liczb naturalnych oznaczamy przez ω , zaś moc zbioru liczb rzeczywistych przez $\mathfrak{c}$.

Będziemy stosować nazewnictwo topologii ogólnej. W szczególności *składową* przestrzeni topologicznej X nazywamy każdy maksymalny zbiór spójny zawarty w X . Z kolei *składową* punktu $x \in X$ nazywamy sumę wszystkich zbiorów spójnych zawartych w X , do których należy x . Składowe jednopunktowe nazywamy *trywialnymi*, a pozostałe *nietrywialnymi*. Łukiem nazywamy homeomorficzny obraz odcinka $[0, 1]$. W kwestii pojęć niezdefiniowanych tutaj odsyłamy czytelnika do książki [12]. Z kolei własności przestrzeni liniowo uporządkowanych będziemy wykorzystywali w zakresie określonym w książce [9]. Ilekroć mowa o przestrzeniach metrycznych, metrykę domyślnie oznaczamy przez d , kulę otwartą o środku w punkcie x i promieniu r symbolem $K(x, r)$, zaś średnicę zbioru A przez $\text{diam } A$. W przestrzeni metrycznej X symbolem $\mathcal{B}(X)$ oznaczamy σ -ciało zbiorów borelowskich. Operujemy podstawowymi pojęciami teorii prawdopodobieństwa np. zmienna losowa, rozkład lub niezależność. W naszych rozważaniach szczególnie ważne są pojęcia splotu oraz słabej zbieżności, których definicje i podstawowe własności przytaczamy, jednak zazwyczaj bez dowodu. Potrzebne uzasadnienia można znaleźć w podręcznikach, np. [23]. Miarę Lebesgue’a na prostej rzeczywistej oznaczamy jednolicie symbolem λ .

1 Zwarte podzbiory prostej

W tym rozdziale omawiam rezultaty opublikowane w [6], przy czym niektóre prezentowane dowody różnią się od dowodów tam zamieszczonych. Dla przykładu, naśladujemy dowód charakteryzacji zbioru Cantora jako jedynej z dokładnością do homeomorfizmu niepustej przestrzeni metrycznej zwartej, w sobie gęstej i całkowicie niespójnej, [45, 30.4 Corollary]. Dowód z książki [45] stosuje metodę granic odwrotnych. Z faktów dotyczących ciągów odwrotnych korzystamy w zakresie opisanym w [45, s. 211].

R. L. Moore oraz J. R. Kline [32] pokazali, że jeżeli X jest zwartym podzbiorem płaszczyzny oraz

($\star$) *dowolna nietrywialna składowa przestrzeni X jest łukiem L o tej własności, że jedynie jego końce mogą być punktami skupienia zbioru $X \setminus L$,*

to istnieje łuk na płaszczyźnie zawierający X (a więc zbiór X jest homeomorficzny z podzbiorem prostej). W artykule [6] pokazaliśmy, że w zakresie przestrzeni metrycznych zwartych warunek ($\star$) charakteryzuje dokładnie te przestrzenie, które zanurzają się w $\mathbb{R}$.

Fakt 1.1. *W przestrzeni zwartej Hausdorffa składowa punktu x jest przekrojem wszystkich podzbiorów domknięto-otwartych zawierających x .*

Dowód. Patrz [12, Twierdzenie 8, s. 431]. □

Fakt 1.2. *Jeśli X jest przestrzenią metryczną zwartą oraz $S \subseteq X$ jest składową o średnicy $< \varepsilon$ zawartą w zbiorze otwartym $U \subseteq X$, to istnieje zbiór domknięto-otwarty $W \subseteq X$ o średnicy $< \varepsilon$ taki, że $S \subseteq W \subseteq U$.*

Dowód. Niech $r = \frac{1}{3}(\varepsilon - \text{diam } S) > 0$ oraz $V := \bigcup_{x \in S} K(x, r) \cap U$. Zbiór V jest otwarty oraz $\text{diam } V < \varepsilon$. Na podstawie faktu 1.1 mamy $S = \bigcap \mathcal{V}$, gdzie $\mathcal{V}$ jest rodziną zbiorów domknięto-otwartych zawierających S . Rodzina $\{X \setminus D : D \in \mathcal{V}\}$ jest otwartym pokryciem zbioru zwartego $X \setminus V$, a więc istnieje rodzina skończona $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ taka, że $W = \bigcap \mathcal{W} \subseteq V$. □

Lemat 1.3. *Jeśli X jest przestrzenią metryczną zwartą spełniającą $(\star)$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ rodzina składowych przestrzeni X o średnicy większej od ε jest skończona.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i przypuśćmy, że (S_n) jest różnowartościowym ciągiem składowych przestrzeni X , przy czym każda z nich ma średnicę $> \varepsilon$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją punkty $a_n, b_n \in S_n$ takie, że $d(a_n, b_n) > \varepsilon$. Ponadto (również dla każdego $n \in \mathbb{N}$) istnieje punkt $c_n \in S_n$ taki, że $d(a_n, c_n) > \varepsilon/2$ oraz $d(b_n, c_n) > \varepsilon/2$. Istotnie, w przeciwnym razie zbiory $K(a_n, \varepsilon/2) \cap S_n$, $K(b_n, \varepsilon/2) \cap S_n$ stanowiłyby podział spójnego zbioru S_n na dwa otwarte i niepuste podzbiory. Wobec zwartości przestrzeni X możemy (bez straty ogólności) założyć, że ciągi (a_n) , (b_n) oraz (c_n) są zbieżne odpowiednio do punktów a , b oraz c . Mamy $d(a, c) \geq \varepsilon/2$ oraz $d(b, c) \geq \varepsilon/2$.

Przypuśćmy nie wprost, że punkty a i c leżą w różnych składowych przestrzeni X . Wobec faktu 1.1 istnieje zbiór domknięto-otwarty V taki, że $a \in V$ oraz $c \notin V$. Ze zbieżności ciągów (a_n) oraz (c_n) wynika, że dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $a_n \in V$ oraz $c_n \notin V$. Ponieważ każdy S_n jest spójny, zaś V domknięto-otwarty, więc jednocześnie $S_n \subseteq V$ oraz $S_n \cap V = \emptyset$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$; sprzeczność.

Analogicznie dowodzimy, że punkty b i c leżą w tej samej składowej, którą oznaczamy S . Punkty a , b i c są różne oraz należą do S , a więc jeden z nich leży wewnątrz łuku S (S jest łukiem wobec $(\star)$). Dla ustalenia uwagi założmy, że jest to punkt c (punkty a oraz b zachowują się tak samo). Warunek $(\star)$ gwarantuje wówczas, że prawie wszystkie wyrazy ciągu (c_n) leżą w zbiorze S , co przeczy różnowartościowości ciągu (S_n) . $\square$

W powyższym lemacie założenie, że X spełnia $(\star)$ jest istotne. Kontrprzykładami są iloczyny kartezjańskie $C \times [0, 1]$, gdzie C jest zbiorem Cantora lub $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{c\}$ dla różnowartościowego ciągu (c_n) zbieżnego do $c \in \mathbb{R}$.

Jeżeli X_n jest ciągiem zbiorów oraz są określone funkcje $f_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$, to kładziemy

$$X_\infty := \left\{ (x_n) \in \prod_{n \geq 0} X_n : \forall n \in \mathbb{N} f_n(x_n) = x_{n-1} \right\}.$$

Innymi słowy, X_∞ jest granicą ciągu odwrotnego

$$(1) \quad \cdots \rightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0.$$

Jeśli dodatkowo każda z przestrzeni X_n jest wyposażona w porządek liniowy $<_n$, a funkcje f_n są niemalejące, to warunek

$$(2) \quad (x_n) <_\infty (y_n) \iff \exists n \in \mathbb{N} x_n <_n y_n$$

określa porządek liniowy $<_\infty$ na przestrzeni X_∞ . Wynika to natychmiast z własności

$$x_n <_n y_n \implies \forall_{m \geq n} x_m <_m y_m,$$

która zachodzi dla wszystkich $(x_n), (y_n) \in X_\infty$.

Każdą z przestrzeni X_n uznajemy za przestrzeń topologiczną, gdzie topologia jest generowana przez rodzinę przedziałów otwartych. Jak zauważono we wstępie artykułu [24] w ogólności topologia liniowego porządku w X_∞ nie musi się pokrywać z topologią dziedziczną z produktu $\prod_{n \geq 0} X_n$ (nawet gdy funkcje f_n są ciągłe). Mianowicie, niech

$$X := [-1, 0) \cup \left\{ \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N} \right\}$$

oraz $f: X \rightarrow X$ będzie określona wzorem

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{dla } x < 0 \text{ lub } x = 1, \\ \frac{1}{m+1}, & \text{dla } x = \frac{1}{m}, \text{ gdzie } m > 1. \end{cases}$$

Dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ kładziemy $X_n = X$ oraz $f_n = f$. Wówczas nici należące do granicy odwrotnej X_∞ to ciągi stałe o wartościach w $[-1, 0) \cup \{1\}$. W topologii dziedziczonej z produktu ciąg stałe równy 1 jest punktem izolowanym. Natomiast X_∞ liniowo uporządkowana przez relację $<_\infty$ jest izomorficzna z przedziałem domkniętym. Funkcje f_n nie są suriektywne, bo $\frac{1}{2}$ nie jest wartością f . Jednak dodając dodatkowe założenia, dostajemy co następuje.

Lemat 1.4. *Niech $(X_n, <_n)$ będzie ciągiem przestrzeni liniowo uporządkowanych. Jeżeli funkcje $f_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$ są ciągłymi niemalejącymi suriekcjami, to topologia granicy X_∞ ciągu odwrotnego (1) dziedziczona z produktu $\prod_{n \geq 0} X_n$ jest identyczna z topologią liniowego porządku $<_\infty$.*

Dowód. Ustalmy zbiór podbazowy $((x_n), \rightarrow) \subseteq X_\infty$ topologii liniowego porządku $<_\infty$ oraz nieć $(y_n) \in ((x_n), \rightarrow)$. Wtedy istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $x_k <_k y_k$, stąd

$$(y_n) \in \pi_k^{-1}[(x_k, \rightarrow)] \cap X_\infty \subseteq ((x_n), \rightarrow).$$

Postępując analogicznie ze zbiorami $(\leftarrow, (x_n))$, dostajemy, że każdy zbiór podbazowy topologii liniowego porządku $<_\infty$ jest otwarty w X_∞ z topologią dziedziczną z produktu $\prod_{n \geq 0} X_n$.

Na odwrót, ustalmy zbiór podbazowy $U = \pi_k^{-1}[(x^*, \rightarrow)] \cap X_\infty$ w topologii na X_∞ dziedziczonej z produktu $\prod_{n \geq 0} X_n$, gdzie $x^* \in X_k$, oraz nieć $(y_n) \in U$. Rozważmy następujące przypadki:

(I) Jeśli (y_n) nie jest elementem najmniejszym U względem $<_\infty$, to istnieje $(z_n) \in U \cap (\leftarrow, (y_n))$, a więc $(y_n) \in ((z_n), \rightarrow) \subseteq U$.

(II) Jeżeli (y_n) jest elementem najmniejszym U względem $<_\infty$, to dla każdego $n \geq k$ punkt y_n jest elementem najmniejszym względem $<_n$ zbioru otwartego

$$(f_n \circ \dots \circ f_{k+1})^{-1}[(x^*, \rightarrow)],$$

a więc istnieje (x_n) taka, że $x_k = x^*$ oraz $x_{n+1} = \max f_{n+1}^{-1}(x_n)$ jest bezpośrednim poprzednikiem y_{n+1} dla wszystkich $n \geq k$. Wówczas $(y_n) \in ((x_n), \rightarrow) \subseteq U$.

Postępując analogicznie ze zbiorami podbazowymi postaci $\pi_k^{-1}[(\leftarrow, x^*)] \cap X_\infty$, stwierdzamy, że topologia dziedziczona z produktu zawiera się w topologii liniowego porządku $<_\infty$, co kończy dowód. $\square$

Zbiór Cantora można przedstawić jako granicę odwrotną ciągu przestrzeni dyskretnych skończonych. Mianowicie, niech $X_n = 2^n$ oraz $f_n: 2^n \rightarrow 2^{n-1}$ będzie określone wzorem $f_n(i_1, \dots, i_n) = (i_1, \dots, i_{n-1})$. Niech $H: 2^\mathbb{N} \rightarrow X_\infty$ będzie bijekcją określoną wzorem

$$H((i_1, i_2, \dots)) = (i_1, \dots, i_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dla każdego ciągu $(i_1, \dots, i_k) \in 2^k$ mamy

$$H[\{f \in 2^\mathbb{N}: (i_1, \dots, i_k) \subseteq f\}] = X_\infty \cap \pi_k^{-1}(i_1, \dots, i_k),$$

gdzie π_k to rzutowanie $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ na X_k . Zatem H przekształca zbiory bazowe $2^\mathbb{N}$ na zbiory bazowe X_∞ i odwrotnie, a więc H jest homeomorfizmem.

Poniżej przedstawiamy opis granicy odwrotnej przestrzeni, które są sumami zbioru skończonego oraz skończonej liczby przedziałów domkniętych.

Lemat 1.5. Niech A_n będzie przestrzenią dyskretną skończoną, $\mathcal{I}_n$ skończoną rodziną złożoną z rozłącznych łuków, zaś X_n będzie sumą prostą A_n oraz łuków z rodziny $\mathcal{I}_n$. Niech funkcje $f_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$ będą takie, że zachodzą następujące warunki.

(A) Dla każdego $x \in A_n$ mamy $f_n(x) \in A_{n-1}$ lub $f_n(x)$ jest końcem pewnego łuku $J \in \mathcal{I}_{n-1}$.

(B) Dla każdego $I \in \mathcal{I}_n$, albo $f_n[I] \subseteq \{y\}$, gdzie $y \in A_{n-1}$ lub y jest końcem pewnego łuku $J \in \mathcal{I}_{n-1}$, albo $f_n|_I$ jest homeomorfizmem na pewien łuk $J \in \mathcal{I}_{n-1}$.

(C) Dla każdego łuku $J \in \mathcal{I}_{n-1}$ istnieje dokładnie jeden łuk $I \in \mathcal{I}_n$ taki, że $f_n[I] = J$.

Wówczas granica X_∞ ciągu odwrotnego określonego wzorem (1) jest homeomorficzna z podzbiorem prostej $\mathbb{R}$.

Dowód. Możemy bez straty ogólności założyć, że f_n są suriektywne oraz przyjąć $X_0 = \{0\}$. Na każdym zbiorze X_n indukcyjnie określimy porządek liniowy $<_n$ w następujący sposób. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i założmy, że zdefiniowaliśmy porządek $<_{n-1}$. Dla $y \in X_{n-1}$ wprowadzimy porządek liniowy $<_y$ na zbiorze $f_n^{-1}(y)$, rozważając przypadki.

- (I) Jeśli $y \in A_{n-1}$, to $f_n^{-1}(y)$ porządkujemy relacją $<_y$ tak, żeby topologia dziedziczona z X_n była identyczna z topologią liniowego porządku.
- (II) Jeśli y jest punktem wewnętrznym łuku $J \in \mathcal{I}_{n-1}$, to $f_n^{-1}(y)$ jest jednopunktowy, a więc nie ma co robić.
- (III) Jeśli y jest lewym końcem łuku $J \in \mathcal{I}_{n-1}$, to relację $<_y$ dobieramy tak, żeby topologia dziedziczona z X_n była identyczna z topologią liniowego porządku, a jedyny punkt $x^* \in f_n^{-1}(y) \cap I$ był elementem największym, gdzie $I \in \mathcal{I}_n$ oraz $f_n[I] = J$.
- (IV) Jeżeli y jest prawym końcem łuku $J \in \mathcal{I}_{n-1}$, to postępujemy analogicznie jak w przypadku (III) z tą różnicą, że x^* będzie elementem najmniejszym w $f_n^{-1}(y)$.

Dla punktów $x, x' \in X_n$ kładziemy $x <_n x'$, gdy $f_n(x) <_{n-1} f_n(x')$ albo $x <_y x'$ dla pewnego $y \in X_{n-1}$ takiego, że $f_n(x) = f_n(x') = y$; to kończy definicję liniowego porządku $<_n$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ topologia liniowego porządku w X_n jest identyczna z wyjściową, zaś funkcja f_n jest niemalejąca. Granica odwrotna X_∞ jest uporządkowana liniowo przez relację $<_\infty$ zdefiniowaną przez warunek (2). Na podstawie lematu 1.4 topologia liniowego porządku w X_∞ jest identyczna z topologią dziedziczną z produktu $\prod_{n \geq 0} X_n$. Stąd X_∞ jest metryczną ośrodkową przestrzenią liniowo uporządkowaną, więc zanurza się w $\mathbb{R}$ (z zachowaniem porządku), patrz [12, Zadanie B.(c), s. 449] lub porównaj <https://math.stackexchange.com/q/4913496> □

Wniosek 1.6. *Założmy, że przy takich samych założeniach jak w lemacie 1.5 zadana jest dodatkowo funkcja φ określona na zbiorze nietrywialnych składowych przestrzeni X_∞ taka, że $\varphi(I)$ jest jednym z końców łuku I . Wówczas homeomorfizm $h: X_\infty \rightarrow X \subseteq \mathbb{R}$ można dobrać tak, żeby $h(\varphi(I))$ było lewym końcem przedziału $h[I]$.*

Dowód. Możemy bez straty ogólności założyć, że $\mathcal{I}_n \subseteq \mathcal{I}_{n+1}$ oraz suma $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_n$ jest rodziną wszystkich nietrywialnych składowych X_∞ . a jeśli $f_n|_I$ jest homeomorfizmem, to ten homeomorfizm jest identycznością. W dowodzie lematu 1.5 przy dobieraniu porządków liniowych $<_n$ można to zrobić tak, żeby $\min_{<_n} I = \varphi(I)$ dla wszystkich $I \in \mathcal{I}_n$. □

Twierdzenie 1.7 ([6, Theorem 7]). *Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą, która spełnia warunek $(\star)$. Wówczas X jest homeomorficzna z podzbiorem $\mathbb{R}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{I}_n$ oznacza rodzinę składowych o średnicach $\geq \frac{1}{n}$. Rodziny $\mathcal{I}_n$ są skończone na mocy lematu 1.3. Indukcyjnie zdefiniujemy rodziny skończone $\mathcal{A}_n$ zbiorów domkniętych takie, że

- (1) $\text{diam } A < \frac{1}{n}$ dla $A \in \mathcal{A}_n$;
- (2) $\bigcup \mathcal{A}_n \cup \bigcup \mathcal{I}_n = X$;
- (3) elementy $\mathcal{A}_n$ są parami rozłączne, zaś jeśli $A \in \mathcal{A}_n$ ma punkt wspólny z $I \in \mathcal{I}_n$, to jest to dokładnie jeden punkt wspólny, który jest końcem I oraz punktem skupienia zbioru $X \setminus I$;
- (4) rodziny $\mathcal{A}_{n+1}$ oraz $\mathcal{I}_{n+1} \setminus \mathcal{I}_n$ są wpisane w $\mathcal{A}_n$.

Założmy, że zdefiniowana została rodzina $\mathcal{A}_n$ o żądanych własnościach, przy czym $\mathcal{A}_0 = \{X\}$ oraz $\mathcal{I}_0 = \emptyset$. Ustalmy $A \in \mathcal{A}_n$ i rozważmy zbiory

$$B := A \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{I}_{n+1}} \text{int } I \text{ oraz } C := B \cap \bigcup \mathcal{I}_{n+1}.$$

Każda składowa zbioru B jest składową A o średnicy $< \frac{1}{n+1}$ rozłączną z C lub składową trywialną zawierającą punkt zbioru C , który jest końcem pewnego łuku $I \in \mathcal{I}_{n+1}$ i punktem skupienia zbioru $A \setminus I$. Na podstawie faktu 1.2 dla każdej składowej S zbioru B istnieje zbiór domknięto-otwarty $W_S \subseteq B$ o średnicy $< \frac{1}{n+1}$ taki, że

$$S \subseteq W_S \subseteq (B \setminus C) \cup S.$$

Wobec zwartości zbioru B z pokrycia zbiorami W_S można wybrać podpokrycie skończone $\mathcal{W} = \{W_1, \dots, W_n\}$ złożone ze zbiorów domknięto-otwartych w B . Definiując

$$V_i := W_i \setminus \bigcup_{j < i} W_j,$$

otrzymujemy wpisane w $\mathcal{W}$ pokrycie $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$ rozłącznymi zbiorami domkniętymi, przy czym w każdym V_i leży co najwyżej jeden punkt zbioru C . W ten sposób każdemu zbiorowi $A \in \mathcal{A}_n$ przypisujemy rodzinę $\mathcal{V} = \mathcal{V}_A$.

Jeśli zbiór $A \in \mathcal{A}_n$ jest rozłączny z $\bigcup \mathcal{I}_n$, to A jest domknięto-otwarty w X , a składowe A to dokładnie składowe X zawarte w A . Jeśli zbiór $A \in \mathcal{A}_n$ ma dokładnie jeden punkt wspólny x z pewnym $I \in \mathcal{I}_n$, to $\{x\}$ jest składową A , a pozostałe składowe A to dokładnie składowe X zawarte w A . Kładąc

$$\mathcal{A}_{n+1} := \bigcup_{A \in \mathcal{A}_n} \mathcal{V}_A,$$

dostajemy rodzinę spełniającą żądane warunki.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy relację równoważności $\sim_n$ w X wzorem

$$x \sim_n y : \Longleftrightarrow (x = y \text{ lub } \exists A \in \mathcal{A}_n \{x, y\} \subseteq A).$$

Niech X_n będzie przestrzenią ilorazową względem relacji $\sim_n$, a $q_n : X \rightarrow X_n$ naturalnym odwzorowaniem ilorazowym, patrz [12, s. 123]. Każda klasa abstrakcji relacji $\sim_n$ (tzn. element X_n) jest równa pewnemu zbiorowi $A \in \mathcal{A}_n$ bądź zbiorowi $\{x\}$, gdzie $x \in \text{int } I$ dla pewnego $I \in \mathcal{I}_n$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $f_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ będzie funkcją taką, że wartością f_n na zbiorze $A \in X_n$ jest zbiór $A^* \in X_{n-1}$ taki, że $A \subseteq A^*$. Stąd $f_n \circ q_n = q_{n-1}$, a więc funkcje f_n są ciągłe.

Pokażemy, że przestrzeń X jest homeomorficzna z granicą odwrotną X_∞ ciągu

$$\cdots \rightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0.$$

Określamy funkcję $h : X \rightarrow X_\infty \subseteq \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ wzorem $h(x) := (q_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. Dla dowodu różnowartościowości funkcji h ustalmy gałąź $b = (Q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_\infty$. Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest $Q_n \in \mathcal{A}_n$, to ze względu na warunek (1) zbiór $h^{-1}(b) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ jest jednoelementowy. Jeśli istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że zbiór Q_n jest postaci $\{x\}$, gdzie $x \in \text{int } I$ dla pewnego $I \in \mathcal{I}_n$, to $h^{-1}(b) = \{x\}$.

Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz zbioru $A \subseteq X_n$ zachodzi

$$h^{-1}[X_\infty \cap \pi_n^{-1}[A]] = q_n^{-1}[A],$$

przeciwbrazy zbiorów podbazowych w X_∞ są otwarte w X , a więc h jest funkcją ciągłą.

Każda z przestrzeni X_n jest homeomorficzna ze skończoną sumą prostą odcinków domkniętych i zbiorów jednopunktowych. Przestrzeń X_∞ jest więc przestrzenią Hausdorffa jako podprzestrzeń produktu $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ (patrz [12, Twierdzenie 7, s. 109]). Stąd h jako funkcja ciągła i różnowartościowa z przestrzeni zwartej jest homeomorfizmem (patrz [12, Twierdzenie 10, s. 167]).

Rozważany system odwrotny spełnia założenia lematu 1.5, a więc przestrzeń X_∞ (a co za tym idzie również X) jest homeomorficzna z podzbiorem prostej $\mathbb{R}$. $\square$

Wniosek 1.8. *Przy założeniach twierdzenia 1.7 homeomorfizm h między X oraz podzbiorem prostej $\mathbb{R}$ można dobrać tak, żeby zadany z góry koniec każdego łuku maksymalnego I przestrzeni X przechodził w lewy koniec przedziału $h[I]$.*

Dowód. Bezpośrednio z wniosku 1.6. $\square$

1.1 Cantorvale

Cantorvale to specyficzne zwarte podzbiory $\mathbb{R}$. Zostały one wprowadzone w artykule [30], gdzie autorzy rozważali sumy algebraiczne dwóch zbiorów Cantora na prostej. Dla pewnej klasy zbiorów Cantora (tzw. jednorodnych zbiorów Cantora) znana jest charakteryzacja sumy: taka suma algebraiczna jest przedziałem, zbiorem Cantora, M-Cantorvalem, L-Cantorvalem bądź R-Cantorvalem, patrz [30, Theorem A].

Luką (ang. *gap*) zbioru zwartego $C \subseteq \mathbb{R}$ (lub *C-luką*) nazywamy każdą składową dopełnienia zbioru C . Z kolei składowe nietrywialne zbioru zwartego $C \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy *C-przedziałami*. Wypowiadając równoważnie definicje z artykułu [30], *L-Cantorvalem* (odpowiednio *R-Cantorvalem*) nazywamy niepusty zbiór zwarty $C \subseteq \mathbb{R}$ taki, że każdy prawy (lewy) koniec¹ *C*-luki jest jednocześnie końcem *C*-przedziału, zaś każdy lewy (prawy) koniec *C*-luki leży w składowej trywialnej zbioru C . Ponieważ malejący homeomorfizm prostej rzeczywistej przenosi L-Cantorval na R-Cantorval i odwrotnie, skupiamy uwagę na L-Cantorvalach.

W przestrzeniach X , w których prawdziwa jest własność $(\star)$, koniec x składowej nietrywialnej $I \subseteq X$ nazywamy *wolnym*, gdy $x \in \text{int}_X I$. Zauważmy, że w L-Cantorvalu prawy koniec każdego przedziału maksymalnego nie może być jednocześnie końcem luki tzn. nie jest on wolny. Z drugiej strony lewy koniec przedziału maksymalnego L-Cantorvala może, ale nie musi być wolny. L-Cantorval nazywamy *specjalnym*, gdy wszystkie jego przedziały maksymalne mają dokładnie jeden (lewy) koniec wolny. Przykładem specjalnego L-Cantorvala jest zbiór

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2s_i}{3^i} : (s_i) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \right\} \cup \bigcup_{n \in \omega} \bigcup_{s \in \{0, 1\}^n} \left[\sum_{i=1}^n \frac{2s_i}{3^i} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}, \sum_{i=1}^n \frac{2s_i}{3^i} \right),$$

czyli zbiór powstały przez dodanie do trójkowego zbioru Cantora przedziałów wypełniających każdą lukę w (prawej) połowie. Ponieważ własność bycia końcem wolnym jest niezmiennikiem homeomorfizmów, więc nie wszystkie L-Cantorvale są homeomorficzne. Istotnie, zbiór $C \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ jest L-Cantorvalem, natomiast jego przedział maksymalny $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ nie ma końców wolnych. Poniższy dobrze znany fakt posłuży jako lemat w dowodzie charakteryzacji L-Cantorvali.

Fakt 1.9. *Dany jest ciąg (x_n) o wartościach w przestrzeni metrycznej (X, d) . Jeśli $d(x_{n+1}, x_n) \leq a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, przy czym szereg liczbowy $\sum_n a_n$ jest zbieżny, to ciąg (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego.*

Dowód. Do ustalonego $\varepsilon > 0$, dobierając $N \in \mathbb{N}$ tak, żeby $\sum_{k=N}^{\infty} a_k < \varepsilon$, dla każdego

¹Dotyczy to tylko końców, które leżą w $\mathbb{R}$.

$n > N$ mamy

$$d(x_n, x_N) \leq d(x_n, x_{n-1}) + \cdots + d(x_{N+1}, x_N) \leq a_{n-1} + \cdots + a_N \leq \sum_{k=N}^{\infty} a_k < \varepsilon. \quad \square$$

Zbiór zwarty $X \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy *zorientowanym lewostronnie* (ang. *left-oriented*), gdy każdy X -przedział z dokładnie jednym wolnym końcem ma lewy koniec wolny. Mówimy, że funkcja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (gdzie $X \subseteq \mathbb{R}$ jest zwarty) *redukuje* X -lukę (a, b) , gdy istnieje $\varepsilon \in (0, b - a)$ oraz zbiór domknięto-otwarty $V \subseteq X \cap (b, b + \varepsilon)$ taki, że $\min V$ leży w X -przedziale oraz

$$f(x) = \begin{cases} x - \varepsilon, & \text{dla } x \in V, \\ x, & \text{dla } x \in X \setminus V. \end{cases}$$

Twierdzenie 1.10. ([6, Theorem 9]) *Niech X będzie niepustą przestrzenią metryczną zwartą, która spełnia warunek $(\star)$ oraz każdy niepusty zbiór domknięto-otwarty zawiera nietrywialną składową z dokładnie jednym końcem wolnym. Wówczas X jest homeomorficzna z L -Cantorvalem.*

Dowód. Według twierdzenia 1.7 oraz wniosku 1.8 możemy założyć, że X jest zorientowanym lewostronnie podzbiorem $\mathbb{R}$. Wówczas każdy prawy koniec X -przedziału nie jest wolny, a więc każdy lewy koniec X -luki leży w składowej trywialnej. Rozważmy przeliczalny zbiór B wszystkich prawych końców X -luk, które leżą w składowych trywialnych zbioru X . Weźmy ciąg $(b_1, b_2, b_3, \dots)$, w którym każdy element B występuje nieskończenie wiele razy (jeśli $B = \emptyset$, to X już jest L -Cantorvalem). Zdefiniujemy indukcyjnie ciąg (X_n) zwartych podzbiorów $\mathbb{R}$ (gdzie $X_1 = X$) oraz ciąg homeomorfizmów $f_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$ takich, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzą następujące warunki.

- (1) Funkcja f_n redukuje X_n -lukę o prawym końcu $(f_1 \circ \cdots \circ f_{n-1})(b_n)$.
- (2) $|f_n(x) - x| \leq 2^{-n}$ dla $x \in X_n$.
- (3) $|f_n(x) - f_n(y)| \geq 2^{-2^{-n}}|x - y|$ dla $x, y \in X_n$.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i założmy, że zdefiniowane są funkcje $f_1, \dots, f_{n-1}$ spełniające warunki (1)–(3). Z założenia indukcyjnego wynika, że X_n jest lewostronnie zorientowany, zaś $b = (f_1 \circ \cdots \circ f_{n-1})(b_n)$ jest prawym końcem X_n -luki i leży w składowej trywialnej zbioru X_n . Wobec założenia o zbiorze X w przedziale $(b, b + \frac{1}{2}\varepsilon)$ istnieje zbiór domknięto-otwarty $V \subseteq X$ taki, że $\min V$ leży w X_n -przedziale, gdzie kładziemy

$$\varepsilon := \min\{(b - a)(1 - 2^{-2^{-n}}), 2^{-n}\}.$$

Wówczas funkcja f_n określona wzorem

$$f_n(x) = \begin{cases} x - \varepsilon, & \text{dla } x \in V, \\ x, & \text{dla } x \in X \setminus V, \end{cases}$$

spełnia żądane warunki.

Zauważmy, że dodatkowo zachodzą warunki:

- Jeśli $J \subseteq X_n$ jest przedziałem o długości $> 2^{-n}$, to $f_n|_J = \text{id}_J$.
- Jeśli (u, v) jest luką w X_n , która nie jest redukowana przez f_n , przy czym $v - u > 2^{-n}$, to $f_n(x) \geq v$ dla wszystkich $x \in X_n \cap [v, +\infty)$.

Definiując $g_n := f_n \circ \dots \circ f_1$ (oraz $g_0 = \text{id}_X$), na podstawie warunku (2) dostajemy $|g_n(x) - g_{n-1}(x)| \leq 2^{-n}$ dla wszelkich $x \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ jest zbieżny, ciąg funkcyjny (g_n) jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji ciągłej $h: X \rightarrow X_{\infty}$ (wobec zupełności przestrzeni funkcji ciągłych z normą supremum oraz faktu 1.9). Na mocy warunku (3) dla wszelkich $x, y \in X$ mamy $|g_n(x) - g_n(y)| \geq \prod_{k=1}^n 2^{-2^{-k}} |x - y|$. Licząc granicę przy $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$|h(x) - h(y)| \geq 2^{-\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}} |x - y| = \frac{1}{2} |x - y|,$$

co dowodzi różnowartościowości funkcji h . Zatem wobec zwartości zbioru X funkcja h jest homeomorfizmem. Definiujemy ponadto $h_n: X_n \rightarrow X_{\infty}$ wzorem $h_n := \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{n+k} \circ \dots \circ f_n)$.

Pokażemy, że X_{∞} jest L-Cantorvalem. Zbiór X_{∞} jest zorientowany lewostronnie, gdyż dla każdego przedziału $J \subseteq X$ mamy $g_n|_J = g_{n+1}|_J$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Niech (p, q) będzie luką w zbiorze X_{∞} . Wówczas $\{p\}$ jest składową X_{∞} (o ile $p > -\infty$), gdyż X_{∞} jest zorientowany lewostronnie i nie ma składowych z dwoma wolnymi końcami. Aby pokazać, że q jest końcem przedziału (o ile $q < +\infty$) rozważmy zbiory $A = (-\infty, p] \cap X_{\infty}$ oraz $B = [q, +\infty) \cap X_{\infty}$. Oznaczmy $A_n = h_n^{-1}[A]$, $B_n = h_n^{-1}[B]$ oraz $\delta = q - p > 0$.

Zauważmy, że $\inf_{n \in \mathbb{N}} d(A_n, B_n) > 0$. Istotnie, w przeciwnym razie bierzemy $n \in \mathbb{N}$ takie, żeby jednocześnie $d(A_n, B_n) < \frac{1}{3}\delta$ oraz $\|h_n - \text{id}_{X_n}\| < \frac{1}{3}\delta$, a wówczas istnieją $a \in A_n$ oraz $b \in B_n$ takie, że

$$\begin{aligned} \delta = d(A, B) &\leq |h_n(a) - h_n(b)| \leq \\ &|h_n(a) - a| + |a - b| + |b - h_n(b)| < \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\delta = \delta, \end{aligned}$$

co jest niemożliwe.

Weźmy $N \in \mathbb{N}$ takie, że $2^{-N} < \inf_{n \in \mathbb{N}} d(A_n, B_n)$. Przypuśćmy, że $\min B_n$ leży w składowej trywialnej X_n dla wszystkich $n \geq N$. Oznaczmy przez (u, v) lukę w zbiorze X_N o prawym końcu $\min B_N$. Gdyby funkcja f_N redukowała lukę (u, v) , to $\min B_{N+1}$ leżałoby w X_{N+1} -przedziale (wobec warunku (2) lewy koniec odpowiedniego przedziału jest w zbiorze B_N). Zatem f_N redukuje inną lukę, co wobec $v - u > 2^{-N}$ pociąga równość $v = f_N(v) = \min B_{N+1}$. Kontynuując indukcyjnie to rozumowanie stwierdzamy, że dla wszystkich $n \geq N$ jest $v = f_n(v) = \min B_{n+1}$ oraz funkcja f_n redukuje X_n -lukę inną niż ta o prawym końcu v . Jest to sprzeczne z warunkiem, że w ciągu $(b_1, b_2, \dots)$ każdy prawy koniec luki (w składowej trywialnej) pojawia się nieskończenie wiele razy.

Zatem istnieje $n \geq N$ takie, że $s = \min B_n$ leży w X_n -przedziale. Wobec warunku $2^{-n} < d(A_n, B_n)$ luka w zbiorze X_n o prawym końcu s ma długość co najmniej 2^{-n} . Wobec warunku (2) indukcyjnie stwierdzamy, że $s = f_k(s) = \min B_k$ dla wszystkich $k \geq n$, co pociąga $h_n(s) = s$. Dla każdego $b \in B$ mamy $s \leq h_n^{-1}(b)$, więc $h_n(s) = \min B = q$. Ponieważ h_n jest homeomorfizmem, więc q leży w X_∞ -przedziale. $\square$

Według [4] niepusty zbiór zwarty $C \subseteq \mathbb{R}$ nazywamy *M-Cantorvalem*, gdy jest on regularnie domknięty oraz końce C -przedziałów są punktami skupienia składowych trywialnych. Zauważmy, że jeśli niepusty zbiór $C \subseteq \mathbb{R}$ jest regularnie domknięty oraz oba końce dowolnego C -przedziału nie są wolne, to C jest M-Cantorvalem. Istotnie, zbiór $C \setminus \text{int}_{\mathbb{R}} C$ jest zwarty i w sobie gęsty, a więc ma moc continuum, zaś zbiór końców C -luk jest przeliczalny. Jak udowodniono w wielu miejscach, patrz np. [4] lub [33], dowolne dwa M-Cantorvale są homeomorficzne. Przedstawimy dowód tego faktu korzystając z własności przeliczalnych przestrzeni liniowo uporządkowanych.

Przyjmując notację z [43], dla każdego zbioru zwartego $X \subseteq \mathbb{R}$ niech $\mathcal{A}_X$ oznacza rodzinę wszystkich X -luk, zaś $\mathcal{B}_X$ rodziną wszystkich X -przedziałów. Rodzina $\mathcal{A}_X \cup \mathcal{B}_X$ jest w naturalny sposób liniowo uporządkowana zgodnie z porządkiem $<$ dziedziczonym z $\mathbb{R}$. Zauważmy, że zbiór $\bigcup(\mathcal{A}_X \cup \mathcal{B}_X)$ jest gęsty w $\mathbb{R}$. Istotnie, jeśli $\{x\}$ jest składową trywialną, to $x \in \text{cl} \bigcup \mathcal{A}_X$. Dodatkowo za $\mathcal{A}_X^*$ przyjmujemy rodzinę wszystkich X -luk ograniczonych.

Lemat 1.11. *Niech X oraz Y będą zwartymi podzbiorami $\mathbb{R}$. Wówczas istnieje rosnący homeomorfizm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ przenoszący X na Y wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje izomorfizm porządkowy $F: \mathcal{A}_X \cup \mathcal{B}_X \rightarrow \mathcal{A}_Y \cup \mathcal{B}_Y$ przenoszący $\mathcal{A}_X$ na $\mathcal{A}_Y$.*

Dowód. Jeśli $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest rosnącym homeomorfizmem, który przenosi X na Y , to funkcja o wzorze $F(I) := f[I]$ jest szukanym izomorfizmem.

Na odwrót, niech $F: \mathcal{A}_X \cup \mathcal{B}_X \rightarrow \mathcal{A}_Y \cup \mathcal{B}_Y$ będzie izomorfizmem porządkowym, który przenosi $\mathcal{A}_X$ na $\mathcal{A}_Y$. Dla każdego $I \in \mathcal{A}_X \cup \mathcal{B}_X$ znajdujemy rosnącą funkcję afiniczną $f_I: I \rightarrow F(I)$. Określamy funkcję f na zbiorze $\bigcup(\mathcal{A}_X \cup \mathcal{B}_X)$ wzorem $f(x) = f_I(x)$, gdzie

$x \in I$. Funkcja f jako bijekcja między gęstymi podzbiorami $\mathbb{R}$ jednoznacznie rozszerza się do szukanego homeomorfizmu całej prostej. $\square$

Lemat 1.12. *Dane są dwa niepuste przeliczalne zbiory P i Q liniowo uporządkowane w sposób gęsty i bez końców. Ponadto dane są podziały $P = A_P \cup B_P$ oraz $Q = A_Q \cup B_Q$ dla pewnych gęstych w P zbiorów A_P i B_P oraz pewnych gęstych w Q zbiorów A_Q i B_Q . Wówczas istnieje izomorfizm porządkowy $\varphi: P \rightarrow Q$ taki, że $\varphi[A_P] = A_Q$.*

Dowód. Niech (a_n) , (b_n) , (c_n) , (d_n) będą ciągami różnowartościowymi wszystkich elementów odpowiednio zbiorów A_P , B_P , A_Q , B_Q .

Zdefiniujemy indukcyjnie dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcję f_n ściśle rosnącą tak, żeby $f_0 \subseteq \dots \subseteq f_n$ oraz $\{a_1, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq \text{dom } f_n \subseteq P$, $\{c_1, \dots, c_n\} \cup \{d_1, \dots, d_n\} \subseteq \text{dom } f_n^{-1} \subseteq Q$. Dla $n = 0$ przyjmujemy $f_0 = \emptyset$.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że zdefiniowana została funkcja f_{n-1} o żądanych własnościach. O ile wartość funkcji f_{n-1} na argumentcie a_n nie jest zdefiniowana, przyjmujemy $f_n(a_n) := c_k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ jest tak dobrane, żeby f_n była rosnąca. O ile wartość funkcji f_{n-1} na argumentcie b_n nie jest zdefiniowana, przyjmujemy $f_n(b_n) := d_k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ jest tak dobrane, żeby f_n była rosnąca. Następnie, o ile c_n nie jest wartością funkcji f_{n-1} (potencjalnie rozszerzonej o argumenty a_n , b_n), definiujemy $f_n(a_k) := c_n$, gdzie k jest tak dobrane, żeby f_n była rosnąca. Podobnie, o ile d_n nie jest wartością funkcji f_{n-1} , definiujemy $f_n(b_k) := d_n$, gdzie k jest tak dobrane, że f_n była rosnąca.

Przyjmując $\varphi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$, otrzymujemy rosnącą bijekcję o własności $\varphi[A_P] = A_Q$. $\square$

W skrypcie [31, str. 162] omawiane jest pojęcie zbiorów jednakowo położonych. Mianowicie, jeśli A i B są podzbiorami przestrzeni topologicznej X i istnieje autohomeomorfizm X przeprowadzający A na B , to mówimy, że zbiory A i B są *jednakowo położone* w X .

Wniosek 1.13 ([6, Corollary 12]). *Dowolne dwa M-Cantorvale są jednakowo położone w $\mathbb{R}$.*

Dowód. Niech C oraz C' będą M-Cantorvalami. Ponieważ suma C -przedziałów jest gęsta w C , więc między dwoma C -lukami jest C -przedział. Ponieważ C -luka i C -przedział nie mają wspólnego końca, więc między C -luką i C -przedziałem jest C -luka. Ponadto między dwoma C -przedziałami jest C -luka. Wobec powyższego rodziny $\mathcal{A}_C$ oraz $\mathcal{B}_C$ są gęste w przestrzeni liniowo uporządkowanej $\mathcal{A}_C \cup \mathcal{B}_C$. Analogiczne własności przysługują M-Cantorvalowi C' . Przestrzenie $\mathcal{A}_C^* \cup \mathcal{B}_C$ oraz $\mathcal{A}_{C'}^* \cup \mathcal{B}_{C'}$ spełniają założenia lematu 1.12, więc istnieje izomorfizm porządkowy $F^*: \mathcal{A}_C^* \cup \mathcal{B}_C \rightarrow \mathcal{A}_{C'}^* \cup \mathcal{B}_{C'}$ przenoszący $\mathcal{A}_C^*$ na $\mathcal{A}_{C'}^*$. Izomorfizm F^* rozszerzamy do izomorfizmu $F: \mathcal{A}_C \cup \mathcal{B}_C \rightarrow \mathcal{A}_{C'} \cup \mathcal{B}_{C'}$ przenoszącego $\mathcal{A}_C$ na $\mathcal{A}_{C'}$, a następnie stosujemy lemat 1.11. $\square$

Wniosek 1.14. *Jeśli C jest przestrzenią metryczną zwartą o własności $(\star)$, suma składowych nietrywialnych jest gęsta w C oraz wszystkie końce tych składowych nie są wolne, to C jest homeomorficzna z M -Cantorvalem. W szczególności taka przestrzeń jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do homeomorfizmu.*

Dowód. Wobec twierdzenia 1.7 możemy założyć, że C jest podzbiorem prostej, a więc teza wynika z wniosku 1.13. $\square$

Wniosek 1.15. *Dowolne dwa specjalne L -Cantorvale są jednakowo położone w $\mathbb{R}$.*

Dowód. Niech C oraz C' będą specjalnymi L -Cantorvalami. Zgodnie z definicją między dwoma C -lukami jest inna C -luka. Zatem przestrzeń $\mathcal{A}_C^*$ jest liniowo uporządkowana w sposób gęsty i bez końców tzn. jest izomorficzna z liczbami wymiernymi. Ponadto w zbiorze $\mathcal{A}_C^* \cup \mathcal{B}_C$ każda C -luka ma C -przedział jako bezpośredni następnik, a każdy C -przedział ma C -lukę jako poprzednik. To znaczy, że przestrzeń $\mathcal{A}_C^* \cup \mathcal{B}_C$ jest izomorficzna z $\{(-\infty, 1)\} \cup (\mathbb{Q} \times \{0, 1\})$ z porządkiem leksykograficznym, przy czym $\mathcal{A}_C^*$ przechodzi przez ten izomorfizm na $\mathbb{Q} \times \{0\}$. Istotnie, gdy $\varphi: \mathcal{A}_C^* \rightarrow \mathbb{Q}$ jest izomorfizmem, to dla $I \in \mathcal{A}_C^*$ kładziemy² $f(I) = (\varphi(I), 0)$ oraz $f(I^+) = (\varphi(I), 1)$, gdzie $I^+ \in \mathcal{B}_C$ jest następnikiem przedziału I . Analogiczną własność ma przestrzeń związana z L -Cantorvalem C' . Stąd istnieje izomorfizm porządkowy $F: \mathcal{A}_C \cup \mathcal{B}_C \rightarrow \mathcal{A}_{C'} \cup \mathcal{B}_{C'}$ przenoszący $\mathcal{A}_C$ na $\mathcal{A}_{C'}$ i teza wynika z lematu 1.11. $\square$

Wniosek 1.16. *Jeśli C jest przestrzenią metryczną zwartą o własności $(\star)$, suma składowych nietrywialnych jest gęsta w C oraz każda taka składowa ma dokładnie jeden koniec wolny, to C jest homeomorficzna ze specjalnym L -Cantorvalem. W szczególności taka przestrzeń jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do homeomorfizmu.*

Dowód. W każdym domknięto-otwartym podzbiorku zawiera się składowa nietrywialna z dokładnie jednym końcem wolnym, więc wobec twierdzenia 1.10 przestrzeń C jest homeomorficzna z L -Cantorvalem, który jest specjalny ze względu na założenie. Jednoznaczność wynika z wniosku 1.15. $\square$

1.2 Niehomeomorficzne L -Cantorvale

W tym podrozdziale skorzystamy z twierdzenia Mazurkiewicza–Sierpińskiego [29], które mówi, że istnieje continuum wiele niehomeomorficznych przestrzeni przeliczalnych, metrycznych oraz rozproszonych, tj. rozproszonych podprzestrzeni liczb wymiernych. Czytelny dowód tego faktu, a także uogólnień, można znaleźć w artykule [37, Proposition 20, Theorem 21].

²Dodatkowo $(-\infty, 1)$ jest wartością na C -przedziale, który następuje po C -luce nieograniczonej z lewej strony.

Gdy X jest przestrzenią topologiczną, to rozważamy relację $\sim$ leżenia w tej samej składowej spójności, tzn. $x \sim y$, gdy istnieje zbiór spójny $S \subseteq X$ taki, że $x, y \in S$. Zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$ oznaczamy $X/\sim$ oraz wyposażamy w topologię ilorazową. Pomijamy szczegóły dotyczące własności topologii ilorazowej, gdyż są one wyczerpująco opisane w podręczniku [12, s. 122], w szczególności klasy równoważności relacji $\sim$ będziemy oznaczali symbolem $[x]$.

Dowód poniższego twierdzenia będzie polegał na stosownym wypełnianiu luk w trójkowym zbiorze Cantora, a więc różni się od oryginalnego dowodu zamieszczonego w [6].

Twierdzenie 1.17 ([6, Theorem 17]). *Istnieje continuum wiele niehomeomorficznych L -Cantorwali.*

Dowód. Gdy C jest trójkowym zbiorem Cantora, to rodzina luk $\mathcal{A}_C^*$ jest porządkowo izomorficzna z $\mathbb{Q}$. Ustalmy izomorfizm $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{A}_C^*$. Gdy $P \subseteq \mathbb{Q}$ jest zbiorem brzegowym, tzn. P nie zawiera niepustego przedziału $(p, q) \cap \mathbb{Q}$, to zbiór

$$C_P = C \cup \bigcup_{p \in P} f(p) \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \setminus P} f(q)^* \cup [-1, 0),$$

gdzie $(a, b)^* = [\frac{1}{2}(a+b), b)$, jest L -Cantorwalem. Istotnie, luki w zbiorze $\{f(p): p \in P\}$ zostały wypełnione w całości, zaś luki w zbiorze $\{f(q): q \in \mathbb{Q} \setminus P\}$ zostały zmniejszone o połowę przedziałami lewostronnie domkniętymi.

Wobec twierdzenia Mazurkiewicza–Sierpińskiego [29] pozostało pokazać, że jeśli zbiór $C_P \subseteq [-1, 1]$ jest homeomorficzny ze zbiorem $C_Q \subseteq [-1, 1]$, to zbiory P i Q są homeomorficzne, o ile P i Q to podzbiory brzegowe wyposażone w topologię dziedziczną z przestrzeni liczb wymiernych.

Ustalmy homeomorfizm $h: C_P \rightarrow C_Q$. Wówczas funkcja $H: C_P/\sim \rightarrow C_Q/\sim$ określona wzorem $H([x]) = [h(x)]$ jest także homeomorfizmem, co wynika z [12, Twierdzenie 2, s. 123]. Gdy X jest zwartym podzbiorem prostej, to niech $\mathcal{B}_X^*$ oznacza rodzinę X -przedziałów, które nie mają końców wolnych. Homeomorfizm h przeprowadza C_P -przedziały na C_Q -przedziały i zachowuje punkty skupienia, a więc $H[\mathcal{B}_{C_P}^*] = \mathcal{B}_{C_Q}^*$, przy czym

$$\mathcal{B}_{C_P}^* = \{\text{cl } f(p): p \in P\}.$$

W zbiorze Cantora wprowadzamy relację równoważności wzorem

$$x \approx_P y \iff (x = y \text{ lub } x, y \text{ są końcami } f(p) \text{ dla pewnego } p \in P).$$

Definiujemy funkcję $g: P \rightarrow C/\approx_P$ wzorem $g(p) = \{a, b\}$, gdzie $f(p) = (a, b)$. Wówczas

dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{Q}$ zachodzi

$$g[P \cap (x, y)] = g[P] \cap \{S \in C/\approx_P : f(x) < S < f(y)\},$$

a zbiory postaci $\{S \in C/\approx_P : I < S < J\}$, gdzie I oraz J są lukami zbioru Cantora, tworzą bazę przestrzeni $C/\approx_P$. Wynika stąd, że zbiór P z topologią dziedziczoną z $\mathbb{Q}$ jest homeomorficzny $g[P] \subseteq C/\approx_P$. Z kolei istnieje homeomorfizm przestrzeni $C/\approx_P$ na przestrzeń $C_P/\sim$, przy czym obrazem $g[P]$ przez ten homeomorfizm jest dokładnie $\mathcal{B}_{C_P}^*$. Zatem zbiór $\mathcal{B}_{C_P}^*$ z topologią dziedziczoną z $C_P/\sim$ jest homeomorficzny z P . $\square$

2 Zbiory podsum

Przyjęło się, że dla przeliczalnego zbioru A symbol $\sum_{n \in A} x_n$ oznacza sumę szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} x_{a_k}$, gdzie $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ oraz suma ta nie zależy od wyboru ciągu (a_k) . W przestrzeni unormowanej mówimy wtedy, że szereg $\sum_{n \in A} x_n$ jest *zbieżny bezwarunkowo*. *Podszeregiem* szeregu $\sum_{n \in A} x_n$ nazywamy szereg $\sum_{n \in B} x_n$, gdzie $B \subseteq A$ jest dowolne (może być również skończone). Sumę podszeregu (o ile taka istnieje) nazywamy *podsumą*.

Fakt 2.1. *W przestrzeni Banacha podszereg szeregu zbieżnego bezwarunkowo jest zbieżny bezwarunkowo.*

Dowód. Patrz [17, Theorem 3.10]. □

W przestrzeni Banacha, gdy $\sum_n x_n$ jest szeregiem bezwarunkowo zbieżnym, to wobec faktu 2.1 zbiór

$$A(x_n) := \left\{ \sum_{n \in B} x_n : B \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

jest poprawnie określony. Zbiór $A(x_n)$ jest nazywany *zbiorem podsum* (ang. *set of subsums*) lub *zbiorem osiągalnym* (ang. *achievement set*) ciągu (x_n) . Rozważania nad zbiorami podsum zapoczątkował Soichi Kakeya w [20] oraz [21], gdzie m.in. anonsował: *The set of partial sums of any absolutely converging infinite series, real or complex, is perfect.*

Fakt 2.2. *W przestrzeni Banacha zbiór podsum szeregu zbieżnego bezwzględnie jest zbiorem zwartym.*

Dowód. Jako ciągły obraz zbioru Cantora przez funkcję $f: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow A(x_n)$ o wzorze $f((c_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. □

W przestrzeniach skończone wymiarowych zbieżność bezwzględna jest równoważna bezwarunkowej. Ponadto w przypadku szeregów rzeczywistych badanie własności

zbiorów podsum można sprowadzić do szeregów o wyrazach nieujemnych. Następujący fakt po raz pierwszy zauważył H. Hornich [18], por. [34, Proposition 17].

Fakt 2.3. *Gdy szereg rzeczywisty $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ jest zbieżny bezwzględnie, to*

$$A(x_n) = A(|x_n|) + \beta,$$

gdzie $\beta = \sum_{x_n < 0} x_n \leq 0$ jest sumą wszystkich wyrazów ujemnych.

Dowód. W publikacji [4, s. 348] argumentowano następująco. Niech $\alpha = \sum_{x_n > 0} x_n$ oraz $\beta = \sum_{x_n < 0} x_n$. Gdy $B \subseteq \mathbb{N}$, to kładziemy

$$B_+ = \{n \in B : x_n > 0\}, B_- = \{n \in B : x_n < 0\}$$

$$\text{oraz } B_* = \{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\} \setminus B.$$

Mamy

$$(1) \quad \sum_{n \in B_-} x_n = \sum_{n \in B_*} |x_n| + \sum_{x_n < 0} x_n.$$

Dodając do (1) stronami $\sum_{n \in B_+} x_n$, dostajemy

$$\sum_{n \in B} x_n = \sum_{n \in B_+} |x_n| + \sum_{n \in B_*} |x_n| + \beta \in A(|x_n|) + \beta,$$

bo zbiory B_+ oraz B_* są rozłączne. Stąd dowolna podsuma $\sum_{n \in B} x_n$ należy do zbioru $A(|x_n|) + \beta$.

Odejmując od równości (1) stronami liczbę $\sum_{n \in B_+} x_n$, dostaniemy

$$\sum_{n \in B} |x_n| = \sum_{n \in B_+} x_n + \sum_{n \in B_*} x_n - \beta \in A(x_n) - \beta,$$

a więc dowolna liczba postaci $\sum_{n \in B} |x_n| + \beta$ należy do $A(x_n)$. □

Zmiana kolejności wyrazów szeregu nie wpływa na zbiór podsum, a każdy ciąg o wyrazach dodatnich zbieżny do zera można uporządkować malejąco. Z tych powodów skupiamy uwagę na szeregach zbieżnych o wyrazach dodatnich uporządkowanych malejąco. Poniższy fakt uznawany jest za folklor.

Fakt 2.4 (First Gap Lemma). *Niech $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ będzie zbieżnym bezwzględnie szeregiem o wyrazach dodatnich uporządkowanych malejąco oraz $r_n = \sum_{k > n} x_k$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $r_k < x_k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to przedział (r_k, x_k) jest luką w zbiorze $A(x_n)$.*

Dowód. Jeśli $s \in A(x_n)$, to istnieje zbiór $B \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $s = \sum_{n \in B} x_n$. W przypadku $\{1, \dots, k\} \cap B \neq \emptyset$ mamy $s \geq x_k$, zaś w przypadku $B \subseteq \{k+1, k+2, \dots\}$ jest $s \leq r_k$. $\square$

Podstawowym narzędziem do rozróżniania topologicznego typu zbioru podsum jest następujący

Fakt 2.5 (Kakeya). *Niech $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ będzie zbieżnym bezwzględnie szeregiem o wyrazach dodatnich uporządkowanych malejąco oraz $r_n = \sum_{k > n} x_k$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas*

- (i) *$A(x_n)$ jest przedziałem wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \leq r_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$;*
- (ii) *$A(x_n)$ jest skończoną sumą przedziałów wtedy i tylko wtedy, gdy $x_n \leq r_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$;*
- (iii) *$A(x_n)$ jest zbiorem Cantora, jeśli $x_n > r_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód.

- (i) Jeśli $A(x_n)$ jest przedziałem, to warunek $x_n \leq r_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wynika z faktu 2.4. Dla dowodu implikacji przeciwnej zastosujemy tzw. algorytm zachłanny (ang. *greedy algorithm*). Dla ustalonego $s \in [0, r_0)$ definiujemy ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $(n_1, n_2, \dots)$ wzorem rekurencyjnym

$$n_{k+1} = \min \left\{ n > n_k : s < \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^k x_{n_j} \right\} \text{ dla } k \geq 0,$$

przy czym dodatkowo $n_0 = 0$. Wówczas $s = \sum_{n \in B} x_n$, gdzie $B = \mathbb{N} \setminus \{n_1, n_2, \dots\}$.

- (ii) Jeśli $A(x_n)$ jest skończoną sumą przedziałów, to warunek $x_n \leq r_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ wynika z faktu 2.4. Na odwrót, weźmy $N \in \mathbb{N}$ takie, że $x_n \leq r_n$ dla wszystkich $n \geq N$. Wobec punktu (i) zbiór $A(x_{N+n})$ jest przedziałem, zaś $A(x_n) = F_N + A(x_{N+n})$, gdzie $F_N = \{\sum_{k=1}^N \varepsilon_k x_k : (\varepsilon_k) \in 2^N\}$.

- (iii) Zobacz [34, Theorem 4]. $\square$

Implikacja w warunku (iii) nie może zostać odwrócona, o czym świadczy ciąg $x_{2k-1} = x_{2k} = \frac{1}{4^k}$. Kakeya postawił hipotezę, że jeśli $x_n > r_n$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$, to $A(x_n)$ jest zbiorem Cantora. W artykule [44] oraz niezależnie w [14] podano przykłady szeregów, których zbiory podsum są M-Cantorwalami. Problem charakteryzacji topologicznej zbiorów podsum na prostej został ostatecznie rozstrzygnięty w artykule [16].

Twierdzenie 2.6 (Guthrie–Nymann, [16]). *Zbiór podsum szeregu bezwzględnie zbieżnego na prostej rzeczywistej ma jedną z następujących postaci:*

(1) *zbiór skończony;*

(2) *skończona suma przedziałów domkniętych;*

(3) *zbiór Cantora;*

(4) *M-Cantorval.*

□

2.1 Ciągi multigeometryczne oraz zbiory samopodobne

Geometria zbiorów samopodobnych na prostej rzeczywistej opiera się na idei, zgodnie z którą zbiór samopodobny X jest sumą skończonej liczby przesunięć jego afinicznej kopii qX , gdzie $q \in (0, 1)$, tj.

$$X = \{s_1, \dots, s_n\} + qX.$$

Zbiory podsum ciągów multigeometrycznych, a także ich niektóre uogólnienia w naturalny sposób są samopodobne, np. zbiory rozważane w publikacji [1].

Ciągi multigeometryczne to ciągi postaci

$$(p_1, \dots, p_n; q) := (p_1q, \dots, p_nq, p_1q^2, \dots, p_nq^2, \dots),$$

gdzie $p_1, \dots, p_n$ to liczby rzeczywiste, zaś $q \in (0, 1)$. Dowolny ciąg multigeometryczny daje szereg sumowalny, którego zbiór podsum $A(p_1, \dots, p_n; q)$ jest zbiorem samopodobnym, bo

$$A(p_1, \dots, p_n; q) = q\Sigma + qA(p_1, \dots, p_n; q),$$

gdzie $\Sigma = \{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i : (\varepsilon_i) \in 2^n\}$.

Zbiory samopodobne omawiane w artykule [1] można zapisać jako

$$E(\Sigma, q) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i q^i : (\sigma_i) \in \Sigma^{\mathbb{N}} \right\},$$

gdzie $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem skończonym oraz $q \in (0, 1)$. Zbiory $E(\Sigma, q)$ są samopodobne, gdyż

$$E(\Sigma, q) = q\Sigma + qE(\Sigma, q),$$

co wynika z równości $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i q^i = q\sigma_1 + q \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{i+1} q^i$.

W przypadku gdy $q = \frac{1}{k}$ oraz $\Sigma = \{0, 1, \dots, k-1\}$, to $E(\Sigma, q) = [0, 1]$, przy czym szeregi $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i q^i$ reprezentują zapisy liczb w systemie cyfrowym o podstawie k . Z kolei gdy $q = \frac{1}{3}$ oraz $\Sigma = \{0, 2\}$, to $E(\Sigma, q)$ przedstawia trójkowy zbiór Cantora.

Zbiory podsum ciągów multigeometrycznych są szczególnym przypadkiem zbiorów $E(\Sigma, q)$, gdyż

$$A(p_1, \dots, p_n; q) = E(\{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i : (\varepsilon_i) \in 2^n\}, q).$$

Gdy $\Sigma = \{0, 1, 3\}$, to zbiór $E = E(\Sigma, \frac{1}{3})$ nie jest zbiorem podsum jakiegokolwiek szeregu. Rzeczywiście, zbiór $E(\{0, 1, 3\}, \frac{1}{3})$ nie ma środka symetrii, bo w przeciwnym przypadku zbiór E byłby symetryczny względem punktu $\frac{3}{4}$, gdyż $\max E = \frac{3}{2}$. To jest niemożliwe, bo $\frac{5}{9} \in E$ (gdy $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 3$ oraz $\sigma_k = 0$ dla $k > 3$), zaś $\frac{17}{18} \notin E$ (gdyż $E \cap (\frac{5}{6}, 1) = \emptyset$).

W [1] omawiane są wyniki częściowe dotyczące charakteryzacji topologicznej zbiorów $E(\Sigma, q)$. Przyjmując oznaczenia,

$$\Delta(A) := \max\{|a - b| : a, b \in A, (a, b) \cap A = \emptyset\},$$

$$I(A) := \frac{\Delta(A)}{\Delta(A) + \text{diam } A},$$

$$i(A) := \inf\{I(B) : B \subseteq A, |B| \geq 2\},$$

udowodniono tam m.in. następujące fakty.

Twierdzenie 2.7 ([1]).

(a) $E(\Sigma, q)$ jest zbiorem Cantora, jeśli $q < \frac{1}{|\Sigma|}$.

(b) $E(\Sigma, q)$ jest przedziałem wtedy i tylko wtedy, gdy $q \geq I(\Sigma)$.

(c) $E(\Sigma, q)$ zawiera przedział, jeśli $q \geq i(\Sigma)$. □

Dla $q = \frac{1}{|\Sigma|}$ Z. Nitecki [34, Proposition 12] (por. [33, s. 865]) pokazał, że jeśli $0 \in \Sigma \subseteq \mathbb{Z}$ oraz elementy Σ dają wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez $|\Sigma|$, to $E(\Sigma, q)$ zawiera przedział. W artykule [22] R. Kenyon rozważał rzutowania tzw. jednowymiarowego trójkąta Sierpińskiego, co skutkowało studiowaniem zbiorów $E(\{0, 1, u\}, \frac{1}{3})$. Wspólnie z Szymonem Głębem otrzymaliśmy ogólną charakterystykę skończonych zbiorów Σ , dla których $E(\Sigma, \frac{1}{|\Sigma|})$ zawiera przedział (patrz twierdzenie 2.21). Nasze twierdzenie pozwala w niektórych przypadkach rozstrzygać o postaci topologicznej zbiorów podsum. Jest to uogólnienie rezultatów Kenyona, które planujemy dopiero opublikować. Poniżej omawiam zawartość planowanej publikacji w wersji polskojęzycznej. Poniższy lemat wydaje się być znany; jego dowód przedstawiamy dla wygody czytelnika.

Lemat 2.8. Niech $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ będą zbiorami o skończonej mierze Lebesgue'a. Wówczas funkcja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i + A_i) \right)$$

jest ciągła. W szczególności, dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ skończonej miary Lebesgue'a, funkcja $g: \mathbb{R}^k \rightarrow [0, \infty)$ określona wzorem

$$g(x_1, \dots, x_k) = \lambda \left(\bigcup_{j=1}^k (x_j + A) \cap B \right)$$

jest ciągła.

Dowód. Jeśli zbiory A_i są przedziałami otwartymi, to

$$\lambda \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i + A_i) \right) = \max \left\{ 0, \min_{1 \leq i \leq n} (x_i + \sup A_i) - \max_{1 \leq i \leq n} (x_i + \inf A_i) \right\},$$

a więc f jest wówczas ciągła.

Teraz pokażemy przez indukcję po $m = 0, 1, \dots, n$, że jeśli $A_1, \dots, A_m$ są zbiorami otwartymi, zaś $A_{m+1}, \dots, A_n$ są przedziałami otwartymi, to f jest ciągła. Ustalmy m i załóżmy, że teza zachodzi dla $m - 1$. Wówczas $A_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^m$ dla pewnych parami rozłącznych przedziałów otwartych I_k^m oraz

$$\lambda \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i + A_i) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} (x_i + A_i) \cap (x_m + I_k^m) \cap \bigcap_{i=m+1}^n (x_i + A_i) \right).$$

Zatem f jest sumą szeregu funkcyjnego funkcji, które są ciągłe z założenia indukcyjnego, przy czym zbieżność jest jednostajna na mocy kryterium Weierstrassa, gdyż szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k^m)$ jest zbieżny. To kończy dowód indukcyjny. Jako wniosek dostajemy, że f jest ciągła, gdy $A_1, \dots, A_n$ są zbiorami otwartymi.

Dla dowodu w przypadku ogólnym, ustalmy zbiory mierzalne $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}$ o mierze skończonej, punkt $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ oraz $\varepsilon > 0$. Weźmy zbiory otwarte $U_i \supset A_i$ takie, że $\lambda(U_i \setminus A_i) < \frac{\varepsilon}{3n}$. Dla wszystkich $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\bigcap_{i=1}^n (x_i + U_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n (x_i + A_i) \cup \bigcup_{i=1}^n (x_i + U_i \setminus A_i),$$

a więc

$$\lambda \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i + U_i) \right) - \lambda \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i + A_i) \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda(U_i \setminus A_i) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ dostatecznie blisko x^0 zachodzi

$$\begin{aligned} |f(x^0) - f(x)| \leq & \left| \lambda \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i^0 + A_i) \right) - \lambda \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i^0 + U_i) \right) \right| + \\ & + \left| \lambda \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i^0 + U_i) \right) - \lambda \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i + U_i) \right) \right| + \\ & + \left| \lambda \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i + U_i) \right) - \lambda \left(\bigcap_{i=1}^n (x_i + A_i) \right) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

co kończy dowód ciągłości funkcji f . Dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}$ skończonej miary Lebesgue'a, zgodnie z zasadą włączeń i wyłączeń

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_k) &= \lambda \left(\bigcup_{j=1}^k (x_j + A) \cap B \right) = \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, k\} \\ |I|=j}} \lambda \left(\bigcap_{i \in I} (x_i + A) \cap B \right), \end{aligned}$$

a dla każdego niepustego podzbioru $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ funkcja

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto \lambda \left(\bigcap_{i \in I} (x_i + A) \cap B \right)$$

jest ciągła na podstawie pierwszej części dowodu. Zatem g także jest funkcją ciągłą. $\square$

Gdy E jest zbiorem dodatniej miary Lebesgue'a, to rodzina $\mathcal{T}$ jest E -kafelkowaniem zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, o ile $A \subseteq \bigcup \mathcal{T}$ oraz $\mathcal{T}$ składa się z miarowo rozłącznych przesunięć zbioru E . Innymi słowy, istnieje $B \subseteq \mathbb{R}$ takie, że

$$A \subseteq \bigcup \mathcal{T} \text{ oraz } \mathcal{T} = \{\beta + E : \beta \in B\},$$

oraz dowolny przekrój $(\beta + E) \cap (\beta' + E)$ jest miary Lebesgue'a zero, o ile β i β' są różnymi elementami B . Wprowadzona tutaj definicja E -kafelkowania jest uproszczoną wersją pojęcia *self-affine tile*, o którym mowa w artykule [27].

Zbiór B z definicji E -kafelkowania będziemy nazywać *bazą* dla kafelkowania $\mathcal{T}$ (jest on wyznaczony jednoznacznie, gdy E jest ograniczony). Mówimy, że kafelkowanie $\mathcal{T}$ jest *okresowe*, gdy istnieje $t \neq 0$ takie, że $B + t = B$. Każdą liczbę $t \in \mathbb{R}$, która spełnia ten warunek nazywamy *okresem* kafelkowania $\mathcal{T}$. Zbiór okresów kafelkowania $\mathcal{T}$ tworzy

podgrupę $(\mathbb{R}, +)$. Rzeczywiście, jeśli t_1 i t_2 są okresami, to

$$B + t_1 - t_2 = B - t_2 = B + t_2 - t_2 = B,$$

tn. $t_1 - t_2$ jest okresem. Skoro także 0 jest okresem kafelkowania $\mathcal{T}$, to wszystkie okresy tego kafelkowania tworzą podgrupę grupy addytywnej $\mathbb{R}$.

Gdy $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem skończonym oraz $q \in (0, 1)$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$F_n(\Sigma, q) := \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma_i q^i : (\sigma_i) \in \Sigma^n \right\}.$$

W dalszej części symbol E zawsze będzie skrótem na zbiór $E(\Sigma, q)$, zaś F_n będzie skrótem na $F_n(\Sigma, q)$.

Fakt 2.9. *Jeśli zbiór E zawiera przedział, to jest on regularnie domknięty.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz $y = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i q^i \in E$, gdzie $(\sigma_i) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $q^n \text{diam } E < \varepsilon$. Wówczas $\sum_{i=1}^n \sigma_i q^i \in F_n$. Weźmy punkt $a \in \text{int } E$. Wówczas

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i q^i + q^n a \in F_n + q^n \text{int } E = \text{int}(F_n + q^n E) = \text{int } E$$

oraz

$$\left| \sum_{i=1}^n \sigma_i q^i + q^n a - y \right| = q^n \left| a - \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{i+n} q^i \right| \leq q^n \text{diam } E < \varepsilon. \quad \square$$

Lemat 2.10. *Jeśli $|\Sigma| \cdot q = 1$ oraz $\lambda(E) > 0$, to $|F_n| = |\Sigma|^n$ oraz zbiory $v + q^n E$ są miarowo rozłączne dla różnych $v \in F_n$.*

Dowód. Mamy $E = F_n + q^n E$ i stąd

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \lambda \left(\bigcup_{v \in F_n} (v + q^n E) \right) \leq \sum_{v \in F_n} \lambda(v + q^n E) = \\ &= |F_n| q^n \lambda(E) \leq |\Sigma|^n q^n \lambda(E) = \lambda(E). \quad \square \end{aligned}$$

Lemat 2.11. *Jeśli $|\Sigma| \cdot q = 1$ oraz E zawiera przedział, to dla dowolnych $m \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{R}$ oraz ograniczonego przedziału $I \subseteq \mathbb{R}$ istnieje skończone E -kafelkowanie zbioru I o bazie B zawierającej $v + q^{-m} F_m$.*

Dowód. Ustalmy $m \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{R}$ oraz przedział ograniczony $I \subseteq \mathbb{R}$. Bez straty ogólności zakładamy, że $v + q^{-m} F_m \subseteq I$. Kładziemy

$$L := \text{diam}(q^{-m} F_m) + \max\{|e| : e \in E\}$$

oraz $[x, y] := [\inf I - L, \sup I + L]$. Weźmy przedział $[a, b] \subseteq E$ i dobierzmy $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n > m$ oraz

$$(b - a) > q^n(y - x).$$

Mamy

$$q^{-n}[a, b] \subseteq q^{-n}E = q^{-n}(F_n + q^n E) = q^{-n}F_n + E.$$

Niech $F := x - aq^{-n} + q^{-n}F_{n-m}$. Wtedy, skoro $q^{-n}F_n = q^{-n}F_{n-m} + q^{-m}F_m$, to

$$\begin{aligned} [x, y] &\subseteq x + [0, (b - a)q^{-n}] = \\ &= x - aq^{-n} + q^{-n}[a, b] \subseteq x - aq^{-n} + q^{-n}F_n + E = \\ &= F + q^{-m}F_m + E. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$v + q^{-m}F_m \subseteq I \subseteq [x, y] \subseteq F + q^{-m}F_m + E,$$

więc istnieje $f \in F$ takie, że

$$|v - f| \leq \text{diam}(q^{-m}F_m) + \max\{|e| : e \in E\} = L.$$

Definiujemy

$$B := F + q^{-m}F_m + v - f = x - aq^{-n} + v - f + q^{-n}F_n.$$

Skoro $f \in F$, to $v + q^{-m}F_m \subseteq B$ oraz

$$I \subseteq [x, y] + v - f \subseteq F + q^{-m}F_m + E + v - f = B + E.$$

Ponadto wobec lematu 2.10 zbiory $\beta + E$ oraz $\beta' + E$ są miarowo rozłączne dla różnych elementów $\beta, \beta' \in B$. □

Lemat 2.12. Niech E zawiera przedział oraz $\mathcal{T}_0$ będzie E -kafelkowaniem (o bazie B_0) przedziału $[x, y]$, gdzie $y - x \geq \text{diam } E$. Jeśli $\mathcal{T}$ jest E -kafelkowaniem (o bazie B) przedziału $[u, w] \supset [x, y]$ rozszerzającym $\mathcal{T}_0$, to zbiór

$$\{\beta \in B : (\beta + E) \cap (u, w) \neq \emptyset\}$$

jest jednoznacznie wyznaczony przez $\mathcal{T}_0$. W szczególności E -kafelkowanie prostej $\mathbb{R}$ rozszerzające $\mathcal{T}_0$ jest jedyne.

Dowód. Najpierw pokażemy, że jeśli $\beta \in B \setminus B_0$, to albo $\beta + E < (x, y)$ albo $(x, y) < \beta + E$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Skoro $y - x \geq \text{diam } E$, to istnieje punkt $z \in$

$(x, y) \cap (\beta + E)$. Ponieważ (wobec faktu 2.9) zbiór E jest regularnie domknięty, z jest w domknięciu $\beta + \text{int } E$, a więc $(x, y) \cap (\beta + E)$ zawiera przedział. To przeczy temu, że $(x, y) \subseteq B_0 + E$ oraz zbiór $\beta + E$ jest miarowo rozłączny z $B_0 + E$.

Definiujemy

$$B_+ = \{\beta \in B \setminus B_0 : (\beta + E) \cap (u, w) \neq \emptyset \text{ oraz } \beta + E > (x, y)\},$$

$$B_- = \{\beta \in B \setminus B_0 : (\beta + E) \cap (u, w) \neq \emptyset \text{ oraz } \beta + E < (x, y)\}.$$

Rozważmy przedział maksymalny $I_0 = [p_0, q_0]$ zbioru $B_0 + E$ taki, że $[x, y] \subseteq I_0$. Jeśli $q_0 \geq w$, to B_+ jest pusty (a więc wyznaczony jednoznacznie). Załóżmy, że $q_0 < w$. Pokażemy, że $q_0 = \min B_+ + \min E$. Wobec maksymalności I_0 , istnieje ściśle malejący ciąg (a_n) zbieżny do q_0 taki, że $a_n \notin B_0 + E$. Gdyby $q_0 < \min B_+ + \min E$, to $B_0 + E$ nie pokrywałby pewnego $a_n \in (q_0, \min B_+ + \min E)$. To przeczy temu, że $\mathcal{T}$ pokrywa $[u, w]$. Gdyby $q_0 > \min B_+ + \min E$, to $(\min B_+ + \text{int } E) \cap [p_0, q_0]$ zawierałby przedział, bo E jest regularnie domknięty. To daje sprzeczność z tym, że elementy $\mathcal{T}$ są miarowo rozłączne. Zauważmy, że $\beta_0 := \min B_+$ zależy tylko od $\mathcal{T}_0$, a więc najmniejszy element B_+ jest wyznaczony jednoznacznie przez $\mathcal{T}_0$.

W kolejnym kroku rozważmy przedział maksymalny $I_1 = [p_1, q_1]$ zbioru $B_0 \cup \{\beta_0\} + E$ taki, że $[x, y] \subseteq I_1$. Jeśli $q_1 \geq w$, to B_+ ma dokładnie jeden element β_0 . Jeśli $q_1 < w$, to rozumując analogicznie jak wcześniej, dostajemy $q_1 = \min(B_+ \setminus \{\beta_0\}) + \min E = \beta_1 + \min E$.

Kontynuujemy ten proces indukcyjnie. Indukcja kończy się, gdy $q_n \geq w$. Nie może ona iść w nieskończoność, bo wtedy istniałby rosnący i ograniczony ciąg $\{\beta_0, \beta_1, \dots\} \subseteq B$ i nieskończenie wiele przesunięć zbioru E byłoby zawarte w przedziale ograniczonym, co jest niemożliwe ze względu na dodatnią miarę E .

Zatem $B_+ = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k\}$ jest wyznaczony jednoznacznie przez $\mathcal{T}_0$. Postępujemy analogicznie z B_- . $\square$

Gdy $S \subseteq \mathbb{R}$, to przyjmujemy oznaczenie $D(S) := \{s - s' : s, s' \in S\}$ na zbiór wszystkich różnic. Mówimy, że $d \in \mathbb{R}$ jest *wspólnym dzielnikiem* zbioru $S \subseteq \mathbb{R}$, gdy $S \subseteq d\mathbb{Z}$. Jeśli zbiór $S \subseteq \mathbb{R}$ ma wspólny dzielnik (i niezerowy element), to wśród wspólnych dzielników S istnieje liczba największa. Istotnie, jeśli $0 \neq s \in S$ oraz d jest wspólnym dzielnikiem S , to $\frac{1}{d} \in \frac{1}{s}\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, więc wśród wspólnych dzielników istnieje d takie, że $\frac{1}{d}$ ma najmniejszy moduł.

Jeżeli $\mathcal{A}$ jest σ -ciałem podzbiorów zbioru X , to parę $(X, \mathcal{A})$ nazywamy *przestrzenią mierzalną*. Gdy $(X, \mathcal{A})$ oraz $(Y, \mathcal{B})$ są przestrzeniami mierzalnymi oraz $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ jest miarą, zaś funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest mierzalna, to wzór $\nu(B) = \mu(f^{-1}[B])$ określa miarę $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Nazywamy ją *transportem miary* i zwyczajowo oznaczamy symbolem $f\#\mu$. Gdy $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest zmienną losową na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, to jej

rozkład $f\#\mathbb{P}: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ oznaczamy też symbolem $\mathbb{P}_f$. W szczególności symbol

$$\mathbb{P}_{(f,g)} = (f, g)\#\mathbb{P}$$

oznacza miarę na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ określoną wzorem $\mathbb{P}_{(f,g)}(B) = \mathbb{P}((f, g)^{-1}[B])$, gdzie $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ są zmiennymi losowymi na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Następujący fakt jest powszechnie znany oraz bywa omawiany przy okazji wykładów z rachunku prawdopodobieństwa dla studentów, dla przykładu [19, Twierdzenie 3, s. 96]. Dla wygody czytelnika przytaczamy go wraz z dowodem.

Fakt 2.13. *Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ określone są zmienne losowe $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas zmienne losowe f i g są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy rozkład $\mathbb{P}_{(f,g)}$ wektora (f, g) jest miarą produktową $\mathbb{P}_f \otimes \mathbb{P}_g$.*

Dowód. Załóżmy, że f i g są niezależne. Dla dowolnych zbiorów borelowskich $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(f,g)}(A \times B) &= \mathbb{P}((f, g)^{-1}[A \times B]) = \mathbb{P}(f^{-1}[A] \cap g^{-1}[B]) = \\ &= \mathbb{P}(f^{-1}[A]) \cdot \mathbb{P}(g^{-1}[B]) = \mathbb{P}_f(A) \cdot \mathbb{P}_g(B), \end{aligned}$$

przy czym przedostatnia równość jest konsekwencją niezależności. Miara produktowa $\mathbb{P}_f \otimes \mathbb{P}_g$ jest jedyną miarą o tej własności, a więc $\mathbb{P}_{(f,g)} = \mathbb{P}_f \otimes \mathbb{P}_g$.

Na odwrót, załóżmy, że $\mathbb{P}_{(f,g)} = \mathbb{P}_f \otimes \mathbb{P}_g$. Gdy ustalimy zbiory borelowskie $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, to

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(f^{-1}[A] \cap g^{-1}[B]) &= \mathbb{P}((f, g)^{-1}[A \times B]) = \mathbb{P}_{(f,g)}(A \times B) = \\ &= \mathbb{P}_f \otimes \mathbb{P}_g(A \times B) = \mathbb{P}_f(A) \cdot \mathbb{P}_g(B) = \mathbb{P}(f^{-1}[A]) \cdot \mathbb{P}(g^{-1}[B]), \end{aligned}$$

a więc funkcje f i g są niezależne. □

Według [23, Definition 2.32], gdy $\nu_1, \nu_2: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ są miarami probabilistycznymi, a $f_1, f_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio ν_1 i ν_2 , to *splotem* miar ν_1 i ν_2 nazywamy rozkład zmiennej losowej $f_1 + f_2$, a więc miarę $\mathbb{P}_{f_1+f_2}: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$. Poprawność tej definicji wymaga, żeby niezależne zmienne losowe f_1 i f_2 o zadanych rozkładach ν_1 i ν_2 zawsze istniały, a rozkład zmiennej $f_1 + f_2$ nie zależał od ich wyboru. Istnienie wynika z [23, Corollary 2.23]. Dla dowodu jednoznaczności wystarczy zauważyć, że wobec faktu 2.13 mamy

$$\mathbb{P}_{f_1+f_2} = \mathbb{P}_{\varphi \circ (f_1, f_2)} = \varphi\#\mathbb{P}_{(f_1, f_2)} = \varphi\#(\mathbb{P}_{f_1} \otimes \mathbb{P}_{f_2}) = \varphi\#(\nu_1 \otimes \nu_2),$$

gdzie $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dane jest wzorem $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Splot miar ν_1 oraz ν_2 oznaczamy symbolem $\nu_1 * \nu_2$.

Poniższy fakt jest fragmentem twierdzenia nazywanego czasem twierdzeniem Portmanteau, patrz np. [23, Theorem 13.16], które mówi o warunkach równoważnych na słabą zbieżność ciągu miar. Przytaczamy je w formie wystarczającej dla naszych potrzeb.

Fakt 2.14. *Niech $\mu, \mu_n: \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, 1]$ będą miarami probabilistycznymi, gdzie X jest przestrzenią metryczną. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(I) *Dla każdej funkcji ciągłej i ograniczonej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f \, d\mu_n = \int_X f \, d\mu.$$

(II) *Dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq X$ zachodzi*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \geq \mu(U). \quad \square$$

Gdy $\mu, \mu_n: \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, 1]$ są miarami probabilistycznymi, gdzie X jest przestrzenią metryczną, oraz zachodzą warunki zawarte w fakcie 2.14, to mówimy, że μ jest *słabą granicą* ciągu (μ_n) lub ciąg (μ_n) jest *słabo zbieżny* do miary μ . W przestrzeniach polskich, słaba granica ciągu miar, o ile istnieje, jest wyznaczona jednoznacznie, patrz [23, Remark 13.13].

Kolejne lematy dotyczą teorii miary i są przygotowaniem do dowodu twierdzenia 2.21. Poniższy fakt ma charakter szczególny; jako pierwszy udowodnił go H. Rubin w niepublikowanym manuskrypcie.

Fakt 2.15. *Niech μ będzie słabą granicą ciągu miar borelowskich μ_n na przestrzeni metrycznej X oraz $f, f_n: X \rightarrow Y$ będą funkcjami borelowskimi o wartościach w przestrzeni metrycznej Y . Jeśli zbiór*

$$M := \{x \in X : \exists_{(x_n) \in X^{\mathbb{N}}} (x_n \rightarrow x \text{ oraz } f_n(x_n) \not\rightarrow f(x))\}$$

ma miarę μ równą zero, to $f \# \mu$ jest słabą granicą ciągu miar $f_n \# \mu_n$.

Dowód. Patrz [8, Theorem 5.5] $\square$

Teza faktu 2.15 zachodzi w szczególności wtedy, gdy ciąg funkcyjny f_n jest jednostajnie zbieżny do ciągłej funkcji f (gdyż wtedy zbiór M jest pusty). Gdy $\mu: \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, \infty]$ jest miarą na σ -ciele zbiorów borelowskich przestrzeni X zwartej Hausdorffa, to wzór

$$\varphi_\mu(f) = \int_X f \, d\mu$$

określa funkcjonal liniowy i ciągły na przestrzeni rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na X . Według twierdzenia Riesz, zobacz [38, 6.19 Theorem], każdy funkcjonal liniowy i ciągły na tej przestrzeni jest postaci φ_μ dla dokładnie jednej miary regularnej μ . Poniżej przedstawiamy dowód jednoznaczności.

Lemat 2.16. *Niech X będzie przestrzenią zwartą Hausdorffa, a μ oraz ν będą borelowskimi miarami regularnymi na X . Jeśli*

$$\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$$

dla każdej funkcji ciągłej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, to $\mu = \nu$.

Dowód. Ustalmy zbiór borelowski $B \in \mathcal{B}(X)$ oraz $\varepsilon > 0$. Wobec regularności miar μ oraz ν istnieją zbiory otwarte U_1, U_2 oraz domknięte K_1, K_2 takie, że

$$K := K_1 \cup K_2 \subseteq B \subseteq U_1 \cap U_2 =: U,$$

$\mu(U_1 \setminus K_1) < \varepsilon$ oraz $\nu(U_2 \setminus K_2) < \varepsilon$. Przestrzeń zwarta Hausdorffa jest normalna, więc możemy stosować lemat Urysohna, patrz [12, Twierdzenie 8, s. 61], do zbiorów domkniętych K oraz $X \setminus U$. Stąd istnieje funkcja ciągła $f: X \rightarrow [0, 1]$ taka, że $f|_K \equiv 1$ oraz $f|_{X \setminus U} \equiv 0$. Mamy

$$\begin{aligned} \left| \mu(B) - \int_X f d\mu \right| &= \left| \int_X (\mathbf{1}_B - f) d\mu \right| = \\ &= \left| \int_{K_1} (\mathbf{1}_B - f) d\mu + \int_{U_1 \setminus K_1} (\mathbf{1}_B - f) d\mu + \int_{X \setminus U_1} (\mathbf{1}_B - f) d\mu \right| \leq \\ &\leq \mu(U_1 \setminus K_1) < \varepsilon \end{aligned}$$

i podobnie

$$\left| \nu(B) - \int_X f d\nu \right| < \varepsilon. \quad \square$$

Niech $(X, \mathcal{A}, \mu)$ oraz $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ będą przestrzeniami probabilistycznymi. Mówimy, że funkcja mierzalna $T: X \rightarrow Y$ zachowuje miarę, gdy $\nu = T\#\mu$. Jeśli dodatkowo warunek $T^{-1}[B] = B$ zachodzi jedynie dla zbiorów B miary zero lub jeden, to mówimy, że odwzorowanie T jest *ergodyczne* względem miary ν .

Lemat 2.17. *Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą, a μ oraz ν będą borelowskimi miarami probabilistycznymi na X . Jeśli istnieje odwzorowanie $T: X \rightarrow X$, które jest ergodyczne względem zarówno μ jak i ν , to $\mu = \nu$.*

Dowód. Dla dowolnej funkcji ciągłej $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, z twierdzenia ergodycznego Birkhoffa, zobacz [11, Theorem 2.30],

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = \int_X f \, d\nu$$

dla prawie wszystkich $x \in X$. Ponieważ w przestrzeni metrycznej zwartej każda miara skończona jest regularna, porównaj [10, Proposition 7.2.3], spełnione są założenia lematu 2.16. $\square$

Lemat 2.18. *Niech μ oraz ν będą borelowskimi miarami probabilistycznymi na $[0, 1]$. Jeśli dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi*

$$\int_0^1 \exp(2\pi i k s) \, d\mu(s) = \int_0^1 \exp(2\pi i k s) \, d\nu(s),$$

to $\mu = \nu$.

Dowód. Z twierdzenia Stone’a–Weierstrassa [12, Twierdzenie 12, s. 189] wynika, że zbiór liniowych kombinacji utworzonych z $\{e_n: n \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $e_n(x) = \exp(2\pi i n x)$, jest gęsty w przestrzeni zespolonych funkcji ciągłych na $X = [0, 1]/\{0, 1\}$ z normą supremum. Przestrzeń $[0, 1]/\{0, 1\}$ to przestrzeń ilorazowa powstała z $[0, 1]$ przez utożsamienie punktów 0 oraz 1. Stąd dla dowolnej funkcji ciągłej $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ istnieje ciąg funkcji $f_n \in \text{lin}\{e_n: n \in \mathbb{Z}\}$ taki, że (f_n) zbiega jednostajnie do f , a więc

$$\begin{aligned} \int_X f \, d\mu &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\nu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\nu = \int_X f \, d\nu. \end{aligned}$$

Równość miar μ oraz ν jest więc konsekwencją lematu 2.16. $\square$

Niech $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem skończonym oraz $q \in (0, 1)$. Rozważmy miary borelowskie $\nu_n: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ określone wzorem

$$\nu_n(B) = \frac{|B \cap (q^n \Sigma)|}{|\Sigma|} = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{\sigma \in \Sigma} \mathbf{1}_B(\sigma q^n),$$

a następnie określmy miary $\mu_n: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ jako splot

$$(2) \quad \mu_n = \nu_1 * \cdots * \nu_n.$$

Fakt 2.19. Miara μ_n wyraża się wzorem jawnym

$$(3) \quad \mu_n(B) = \frac{1}{|\Sigma|^n} \sum_{(\sigma_i) \in \Sigma^n} \mathbf{1}_B \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i q^i \right),$$

lub rekurencyjnym

$$(4) \quad \mu_{n+1}(B) = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu_n \left(\frac{1}{q} B - \sigma \right).$$

Ponadto ciąg miar (μ_n) jest słabo zbieżny do pewnej miary μ_∞ , której nośnikiem jest $E(\Sigma, q)$.

Dowód. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $\Sigma^\mathbb{N}$ z miarą produktową $\mathbb{P}$ (która jest produktem miar probabilistycznych równomiernych na Σ). Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozkład zmiennej losowej $g_n: \Sigma^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ o wzorze

$$g_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = \sum_{i=1}^n \sigma_i q^i$$

jest splotem $\mu_n = \nu_1 * \dots * \nu_n$, gdyż zmienne losowe f_i o wzorze $f_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = \sigma_i q^i$ są niezależne, przy czym rozkładem f_i jest miara ν_i . Wzór (3) wynika z przeliczenia

$$\begin{aligned} \mu_n(B) &= \mathbb{P}(g_n^{-1}[B]) = \mathbb{P} \left(\left\{ (\sigma_i) \in \Sigma^n : \sum_{i=1}^n \sigma_i q^i \in B \right\} \times \Sigma \times \Sigma \times \dots \right) = \\ &= \frac{1}{|\Sigma|^n} \left| \left\{ (\sigma_i) \in \Sigma^n : \sum_{i=1}^n \sigma_i q^i \in B \right\} \right| = \frac{1}{|\Sigma|^n} \sum_{(\sigma_i) \in \Sigma^n} \mathbf{1}_B \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i q^i \right). \end{aligned}$$

Ciąg zmiennych losowych (g_n) jest punktowo zbieżny do zmiennej losowej $h: \Sigma^\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$h(\sigma_1, \sigma_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n q^n.$$

Ponieważ zbieżność punktowa pociąga zbieżność według rozkładu (por. [23, Corollary 13.19]), więc ciąg μ_n zbiega słabo do rozkładu μ_∞ zmiennej h .

Zbiór $E = E(\Sigma, q)$ jest domknięty oraz $\mu_\infty(E) = 1$. Jeśli $V \subseteq \mathbb{R}$ jest otwarty oraz $E \cap V \neq \emptyset$, to wobec ciągłości h zbiór $h^{-1}(V)$ jest niepustym zbiorem otwartym, a więc $\mu_\infty(V) > 0$. Zatem E jest nośnikiem miary μ_∞ .

Mamy $\mathbf{1}_B(qx + \sigma q) = \mathbf{1}_{\frac{1}{q}B - \sigma}(x)$ oraz

$$\begin{aligned}\mu_{n+1}(B) &= \frac{1}{|\Sigma|^{n+1}} \sum_{(\sigma_i) \in \Sigma^{n+1}} \mathbf{1}_B \left(\sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i q_i \right) = \\ &= \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{\sigma \in \Sigma} \frac{1}{|\Sigma|^n} \sum_{(\sigma_i) \in \Sigma^n} \mathbf{1}_B \left(q \sum_{i=1}^n \sigma_i q^i + \sigma q \right) = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu_n \left(\frac{1}{q}B - \sigma \right). \quad \square\end{aligned}$$

Miarę μ_∞ nazywamy miarą *skojarzoną* z Σ oraz q . Własności miary μ_∞ są przedmiotem szczególnego zainteresowania w przypadku tzw. spłotów Bernoulliego tzn. gdy $\Sigma = \{-1, 1\}$, zobacz np. [42], [41], [40]. Zbadamy teraz jak zmienia się miara μ_∞ przy przesunięciu zbioru Σ .

Fakt 2.20. *Niech $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ będzie skończony oraz $q \in (0, 1)$. Jeśli μ_∞ jest miarą skojarzoną z Σ oraz q , zaś μ_∞^x jest miarą skojarzoną z $\Sigma + x$ oraz q , to dla każdego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zachodzi*

$$\mu_\infty^x(B) = \mu_\infty \left(B - \frac{x}{1-q} \right).$$

Dowód. Niech (μ_n) oraz (μ_n^x) będą ciągami miar określonych wzorem (2) dla zbiorów odpowiednio Σ oraz $\Sigma + x$. Ze wzoru (3) wynika, że zachodzi

$$\mu_n^x(B) = \mu_n \left(B - x \sum_{i=1}^n q^i \right) = f_n \# \mu_n(B),$$

gdzie $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określone wzorem $f_n(t) = t + x \sum_{i=1}^n q^i$. Ponieważ funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o wzorze $f(t) = t + \frac{x}{1-q}$ jest jednostajną granicą ciągu (f_n) , więc wobec faktu 2.15 mamy $\mu_\infty^x = f \# \mu_\infty$. $\square$

Poniższe twierdzenie stanowi uogólnienie rezultatów Kenyona [22] na przypadek zbiorów Σ dowolnej mocy skończonej.

Twierdzenie 2.21. *Niech $q \in (0, 1)$ oraz $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ będą takie, że $|\Sigma| \cdot q = 1$. Oznaczmy $E = E(\Sigma, q)$, $F_n = F_n(\Sigma, q)$ i niech μ_∞ będzie miarą borelowską, która jest słabą granicą ciągu (μ_n) miar określonych wzorem (2). Wówczas następujące warunki są równoważne.*

- (I) *E ma dodatnią miarę Lebesgue'a.*
- (II) *E zawiera przedział.*
- (III) *Istnieje przeliczalne okresowe E -kafelkowanie $\mathcal{T}$ prostej $\mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ takie, że dq^{-n} jest okresem $\mathcal{T}$ dla wszystkich $d \in D(\Sigma)$.*
- (IV) *$D(\Sigma)$ ma wspólny dzielnik oraz $|F_n| = |\Sigma|^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.*

(V) μ_∞ jest absolutnie ciągle względem miary Lebesgue'a.

(VI) Istnieje $\delta > 0$ takie, że $f_\delta * \mu_\infty$ jest miarą Lebesgue'a $\mathcal{B}[0, 1)$, gdzie $f_\delta(x) = \frac{x}{\delta} - \lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor$ dla $x \in \mathbb{R}$.

(VII) Istnieje $\delta > 0$ takie, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{2\pi i n s}{\delta}\right) d\mu_\infty(s) = 0.$$

(VIII) Istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \exp\left(\frac{2\pi i n \sigma q^k}{\delta}\right) = 0.$$

Ponadto jeśli powyższe warunki są spełnione, to

$$(5) \quad \mu_\infty(B) = \frac{\lambda(B \cap E)}{\lambda(E)} \text{ dla wszystkich } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Dowód.

(I) $\Rightarrow$ (II) Niech $x \in E$ będzie punktem gęstości dla miary Lebesgue'a. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy zbiory

$$V_n = \{v \in F_n : (vq^{-n} + E) \cap [xq^{-n} - 1, xq^{-n} + 1] \neq \emptyset\},$$

$$U_n = q^{-n}(V_n - x).$$

Jeśli $u = q^{-n}(v - x) \in U_n$, to $(u + E) \cap [-1, 1] \neq \emptyset$. Stąd

$$U_n + E \subseteq [-1 - \text{diam } E, 1 + \text{diam } E] \text{ oraz}$$

$$U_n \subseteq [-1 - \text{diam } E, 1 + \text{diam } E] + \min E =: [a, b].$$

Skoro $u + E$ są miarowo rozłączne dla różnych $u \in U_n$ (wobec lematu 2.10), więc $|U_n| \leq k$, gdzie $k = \lceil (2 + 2\text{diam } E)/\lambda(E) \rceil$.

Rozważmy funkcje $u^n \in [a, b]^k$ takie, że $U_n = \{u_1^n, \dots, u_k^n\}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wobec zwartości $[a, b]^k$ wybieramy podciąg $(u^{n_i})_i$ zbieżny do $u \in [a, b]^k$ i niech $U := \{u_1, \dots, u_k\}$.

Skoro x był punktem gęstości, na mocy lematu 2.8 mamy

$$\begin{aligned}
2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(q^{-n}E \cap [xq^{-n} - 1, xq^{-n} + 1]) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda((q^{-n}V_n + E) \cap [xq^{-n} - 1, xq^{-n} + 1]) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda((U_n + E) \cap [-1, 1]) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{j=1}^k (u_j^n + E) \cap [-1, 1]\right) = \\
&= \lambda((U + E) \cap [-1, 1]).
\end{aligned}$$

Zbiór $U + E$ jest domknięty, więc $[-1, 1] \subseteq U + E$. Ponieważ skończona suma zbiorów nigdzie-gęstych jest zbiorem nigdzie-gęstym, a E jest domknięty, więc E musi zawierać przedział.

(II) $\Rightarrow$ (III) Załóżmy, że E zawiera przedział. Wówczas wobec faktu 2.9 jest on regularnie domknięty. Pomocniczo udowodnimy

Stwierdzenie 1. *Dla dowolnych $v \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, jeśli $[x, y] \subseteq v + q^{-n}F_n + E$ dla pewnego przedziału $[x, y]$ długości $\geq \text{diam } E$, to istnieje dokładnie jedno E -kafelkowanie $\mathbb{R}$ o bazie B takiej, że $v + q^{-n}F_n \subseteq B$.*

Dowód. Ustalmy $v \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ takie, że $[x, y] \subseteq v + q^{-n}F_n + E$ dla pewnego przedziału $[x, y]$ długości $\geq \text{diam } E$. Wobec lematu 2.11, dla każdego $M > 0$ istnieje skończone E -kafelkowanie przedziału $[-M, M]$ o bazie $B_M \supset v + q^{-n}F_n$. Kładziemy $B := \bigcup_{M>0} B_M$. Z lematu 2.12 wynika, że $\mathcal{T} = \{\beta + E : \beta \in B\}$ jest szukanym jedynym E -kafelkowaniem $\mathbb{R}$. $\square$

Warunek (III) wynika z następującego silniejszego stwierdzenia, którego będziemy potrzebowali później.

Stwierdzenie 2. *Dla dowolnego ciągu $(\sigma_i) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, istnieje okresowe E -kafelkowanie $\mathbb{R}$ o bazie B takie, że*

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(q^{-n}F_n - \sum_{i=1}^n \sigma_i q^{-i+1} \right) + t\mathbb{Z},$$

gdzie $t \neq 0$ jest dowolnym okresem B . Ponadto, dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$, liczby dq^{-n} są okresami B dla wszystkich $d \in D(\Sigma)$.

Dowód. Ustalmy ciąg $(\sigma_i) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ i oznaczmy

$$A_n := q^{-n}F_n - \sum_{i=1}^n \sigma_i q^{-i+1}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Weźmy przedział $[a, b] \subseteq E$ i ustalmy $n \in \mathbb{N}$ takie, że $b-a > q^n \text{diam } E$. Skoro dla każdego $v \in \mathbb{R}$ mamy

$$v + q^{-n}[a, b] \subseteq v + q^{-n}E = v + q^{-n}F_n + E,$$

wobec stwierdzenia 1 zastosowanego do $v = -\sum_{i=1}^n \sigma_i q^{-i+1}$, istnieje dokładnie jedno E -kafelkowanie $\mathbb{R}$ o bazie B_n takiej, że $A_n \subseteq B_n$. Skoro ciąg zbiorów (A_n) jest wstępujący względem n , z jednoznaczności wynika, że $B_n = B$ nie zależy od n .

Ustalmy okres $t \neq 0$ kafelkowania o bazie B . Weźmy przedział $[a, b] \subseteq E$ oraz $m \in \mathbb{N}$ takie, że $b-a > q^m t$. Wówczas

$$q^{-m}[a, b] \subseteq q^{-m}F_m + E,$$

a więc $A_m + E$ zawiera przedział $[x, y]$ długości $> t$. Ustalmy $\beta \in B$. Wówczas istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$\emptyset \neq (\beta + kt + \text{int } E) \cap (x, y) \subseteq (\beta + kt + \text{int } E) \cap (A_m + \text{int } E).$$

Skoro $\beta + kt \in B$, $A_m \subseteq B$ oraz różne elementy kafelkowania są miarowo rozłączne, dostajemy $\beta + kt \in A_m$, czyli

$$\beta \in A_m - kt \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m + t\mathbb{Z}.$$

Inkluzja przeciwna jest oczywista. Dla każdego $v \in \mathbb{R}$ mamy

$$v + q^{-n}[a, b] \subseteq v + q^{-n}E = v + q^{-n}F_n + E,$$

a więc wobec stwierdzenia 1 istnieje dokładnie jedno E -kafelkowanie $\mathbb{R}$ o bazie $B_v \supset v + q^{-n}F_n$. Dla dowolnych v oraz v' mamy $v' + q^{-n}F_n \subseteq B_v + (v' - v)$, więc wobec jednoznaczności dostajemy $B_v + (v' - v) = B_{v'}$. Skoro

$$q^{-n-1}F_{n+1} = q^{-n}\Sigma + q^{-n}F_n,$$

otrzymujemy $B_v = B_{n+1} = B$ dla każdego $v \in q^{-n}\Sigma - \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i q^{-i+1}$. W szczególności, dla dowolnych $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ zachodzi $(\sigma - \sigma')q^{-n} + B = B$, tzn. $(\sigma - \sigma')q^{-n}$ jest okresem $\mathcal{T}$. $\square$

(III) $\Rightarrow$ (IV) Niech $B \subseteq \mathbb{R}$ będzie bazą dla E -kafelkowania $\mathcal{T}$. Skoro B jest przeliczalna, z twierdzenia Baire'a o kategorii wynika, że E zawiera przedział, a stąd wo-

bec lematu 2.10 mamy $|F_n| = |\Sigma|^n$. Zbiór P wszystkich okresów B jest podgrupą $(\mathbb{R}, +)$, a każda nietrywialna podgrupa G grupy $(\mathbb{R}, +)$ jest albo gęsta w $\mathbb{R}$ albo ma postać $G = r\mathbb{Z}$ dla pewnego $r > 0$. Gdyby P był gęsty, gęsta była by też baza B i pewien ograniczony przedział zawierałby nieskończenie wiele elementów $\mathcal{T}$, co przeczyłoby ich miarowej rozłączności. Zatem $P = r\mathbb{Z}$ dla pewnego $r > 0$ oraz z założenia dostajemy $D(\Sigma) \subseteq q^n P = (rq^n)\mathbb{Z}$.

(IV) $\Rightarrow$ (V) Niech $\delta > 0$ będzie wspólnym dzielnikiem $D(\Sigma)$. Skoro $|F_n| = |\Sigma|^n$, mamy

$$\mu_n(B) = q^n |B \cap F_n|$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i zbioru borelowskiego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ponadto $F_n - F_n \subseteq (\delta q^n)\mathbb{Z}$. Stąd dla każdego przedziału $I \subseteq \mathbb{R}$ mamy

$$\mu_n(I) = q^n |I \cap F_n| \leq q^n k < \frac{\lambda(I)}{\delta} + q^n,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$ jest tak dobrane, żeby $(k-1)\delta q^n < \lambda(I) \leq k\delta q^n$. Ponieważ ciąg miar μ_n jest słabo zbieżny do μ_∞ , z twierdzenia Portmanteau dostajemy

$$\mu_\infty(I) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(I) \leq \frac{\lambda(I)}{\delta}$$

dla każdego przedziału otwartego $I \subseteq \mathbb{R}$. Zatem dla każdego zbioru borelowskiego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zachodzi

$$\begin{aligned} \lambda(B) &= \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(I_k) : B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\} \geq \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta \mu_\infty(I_k) : B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\} \geq \delta \mu_\infty(B). \end{aligned}$$

(V) $\Rightarrow$ (I) Wobec faktu 2.19 zbiór E jest nośnikiem miary μ_∞ .

(V) $\Rightarrow$ (VI) Rozważmy przestrzeń $[0, 1)$ z topologią okręgu tzn. zbiorami otwartymi są dokładnie przeciwobrazy zbiorów otwartych przez funkcję $\xi: [0, 1) \rightarrow S^1$ o wzorze $\xi(x) = \exp(2\pi i x)$. Niech odwzorowanie $T: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ będzie określone wzorem

$$T(x) := |\Sigma|x \pmod{1}.$$

Wówczas T jest funkcją ciągłą, która jest ergodyczna względem miary Lebesgue'a, por. [11, Proposition 2.17]. Niech δ będzie wspólnym dzielnikiem $D(\Sigma)$. Możemy bez straty ogólności zakładać, że $0 \in \Sigma$. Rzeczywiście, jeśli μ_∞^x jest

miarą skojarzoną z $\Sigma + x$ oraz q , to

$$\begin{aligned} f_\delta \# \mu_\infty^x(B) &= \mu_\infty \left(f_\delta^{-1}[B] - \frac{x}{1-q} \right) = \\ &= \mu_\infty \left(f_\delta^{-1} \left[\left(B - \frac{x}{\delta(1-q)} \right) (\bmod 1) \right] \right), \end{aligned}$$

a więc jeśli $f_\delta \# \mu_\infty$ jest miarą Lebesgue'a (na $\mathcal{B}[0, 1)$), to wobec niezmienniczości miary Lebesgue'a na przesunięcia, $f_\delta \# \mu_\infty^x$ także jest miarą Lebesgue'a. Ze wzoru (4) mamy

$$\begin{aligned} T \# (f_\delta \# \mu_{n+1})(B) &= q \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu_n \left(\frac{1}{q} (T \circ f_\delta)^{-1}[B] - \sigma \right) = \\ &= q \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu_n ((T \circ f_\delta \circ h_\sigma)^{-1}[B]) = q \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu_n (f_\delta^{-1}[B]) = f_\delta \# \mu_n(B), \end{aligned}$$

gdzie $h_\sigma(x) = q(x + \sigma)$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $\sigma \in \Sigma$. Przechodząc z $n \rightarrow \infty$, skoro T oraz f_δ są ciągłe (w topologii okręgu na $[0, 1)$), dostajemy $T \# (f_\delta \# \mu_\infty) = f_\delta \# \mu_\infty$, innymi słowy T zachowuje miarę $f_\delta \# \mu_\infty$.

Skoro $f_\delta^{-1}[A] = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (A + k)\delta$, z założenia wynika, że $f_\delta \# \mu_\infty$ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Zatem odwzorowanie T jest ergodyczne względem $f_\delta \# \mu_\infty$. Wobec lematu 2.17 miara $f_\delta \# \mu_\infty$ jest miarą Lebesgue'a.

(VI) $\Rightarrow$ (VII) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \exp(2\pi i n s) d\lambda(s) = \int_0^1 \exp(2\pi i n s) d(f_\delta \# \mu_\infty)(s) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(2\pi i n f_\delta(s)) d\mu_\infty(s) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{2\pi i n s}{\delta}\right) d\mu_\infty(s). \end{aligned}$$

(VII) $\Rightarrow$ (VIII) Dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{2\pi i n s}{\delta}\right) d\mu_{k+1}(s) &= q^{k+1} \sum_{(\sigma_i) \in \Sigma^{k+1}} \exp\left(\frac{2\pi i n \sum_{i=1}^{k+1} (\sigma_i q^i)}{\delta}\right) = \\ &= q^{k+1} \sum_{(\sigma_i) \in \Sigma^k} \sum_{\sigma \in \Sigma} \exp\left(\frac{2\pi i n \sum_{i=1}^k (\sigma_i q^i)}{\delta}\right) \exp\left(\frac{2\pi i n \sigma q^k}{\delta}\right) = \\ &= q \sum_{\sigma \in \Sigma} \exp\left(\frac{2\pi i n \sigma q^k}{\delta}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{2\pi i n s}{\delta}\right) d\mu_k(s). \end{aligned}$$

Indukcyjnie sprawdzamy, że

$$(6) \quad \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{2\pi i n s}{\delta}\right) d\mu_{\infty}(s) = \prod_{k=1}^{\infty} q \sum_{\sigma \in \Sigma} \exp\left(\frac{2\pi i n \sigma q^k}{\delta}\right).$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i przypuśćmy, że

$$a_k := q \sum_{\sigma \in \Sigma} \exp\left(\frac{2\pi i n \sigma q^k}{\delta}\right) \neq 0$$

dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Gdy $S \subseteq \mathbb{R}$ jest skończony oraz $\alpha \in (0, \pi)$ jest takie, że $\max\{|2\pi s| : s \in S\} < \alpha$, to

$$\left| \sum_{s \in S} \exp(2\pi i s) \right| \geq |S| \cos(\alpha).$$

Stąd dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\log\left(q \left| \sum_{\sigma \in \Sigma} \exp\left(\frac{2\pi i n \sigma q^k}{\delta}\right) \right| \right) \geq \log\left(q |\Sigma| \cos\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \log\left(\cos\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Skoro szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

jest zbieżny, dostajemy

$$\prod_{k=1}^{\infty} |a_k| > 0,$$

co przeczy naszemu założeniu.

Uwaga. Do otrzymania równości (6) nie użyliśmy założenia (VII).

(VIII) $\Rightarrow$ (VII) Wynika natychmiast z równości (6).

(VII) $\Rightarrow$ (VI) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp(2\pi i n s) d f_{\delta} \# \mu_{\infty}(s) &= \int_{\mathbb{R}} \exp(2\pi i n \left(\frac{x}{\delta} - \left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor\right)) d\mu_{\infty}(s) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{2\pi i n s}{\delta}\right) d\mu_{\infty}(s) = 0, \end{aligned}$$

czyli wszystkie współczynniki Fouriera miary $f_{\delta} \# \mu_{\infty}$, nie licząc zerowego, są zerowe. Z lematu 2.18 miara $f_{\delta} \# \mu_{\infty}$ jest miarą Lebesgue'a $\lambda|_{\mathcal{B}[0,1]}$.

(VI) $\Rightarrow$ (V) Mamy

$$\lambda(B) \geq \delta\lambda(f_\delta[B]) = \delta\mu_\infty(f_\delta^{-1}[f_\delta[B]]) \geq \delta\mu_\infty(B)$$

dla wszystkich $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Udowodnimy teraz równość (5). Przesunięcie Σ o liczbę x skutkuje przesunięciem zbioru E o liczbę $\frac{x}{1-q}$, więc wobec lematu 2.20 możemy założyć bez straty ogólności, że $0 \in \Sigma$. Na mocy stwierdzenia 2 zastosowanego do ciągu $(\sigma_i) \equiv 0$ istnieje E -kafelkowanie prostej $\mathbb{R}$ o bazie B takiej, że

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} q^{-n} F_n \subseteq B.$$

Definiujemy

$$s(M) = \sup \left\{ \frac{|B \cap I|}{\lambda(I)} : I \text{ jest przedziałem otwartym długości } \geq M \right\}$$

oraz

$$u := \lim_{M \rightarrow \infty} s(M).$$

Wówczas dla każdego przedziału otwartego $I \subseteq \mathbb{R}$ mamy

$$|B \cap I| \cdot \lambda(E) = \sum_{x \in B \cap I} \lambda(x + E) = \lambda \left(\bigcup_{x \in B \cap I} (x + E) \right) \leq \lambda(I) + 2 \operatorname{diam} E.$$

Stąd

$$s(M) \leq \frac{1}{\lambda(E)} + \frac{2 \operatorname{diam} E}{\lambda(E)M}$$

oraz $u \leq \frac{1}{\lambda(E)}$. Dla dowolnego przedziału otwartego I oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\begin{aligned} \mu_n(I) &= q^n |I \cap F_n| = q^n |(q^{-n}I) \cap (q^{-n}F_n)| \leq \\ &\leq q^n |(q^{-n}I) \cap B| \leq q^n s(\lambda_n) \lambda(q^{-n}I) = s(\lambda_n) \lambda(I), \end{aligned}$$

gdzie $\lambda_n = \lambda(q^{-n}I)$. Zatem

$$\mu_\infty(I) \leq \liminf \mu_n(I) \leq u \lambda(I) \leq \frac{\lambda(I)}{\lambda(E)}.$$

Dla każdego borelowskiego zbioru $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mamy

$$\begin{aligned}\lambda(B) &= \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(I_k) : B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\} \geq \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(E) \mu_\infty(I_k) : B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\} \geq \lambda(E) \mu_\infty(B),\end{aligned}$$

a więc

$$1 = \mu_\infty(E) = \mu_\infty(B) + \mu_\infty(B^c) \leq \frac{\lambda(E \cap B) + \lambda(E \setminus B)}{\lambda(E)} = 1. \quad \square$$

Implikacja (I) $\Rightarrow$ (II) twierdzenia 2.21 była już wcześniej udowodniona inną metodą [39, 2.3 Corollary]. Zajmiemy się teraz wnioskami z twierdzenia 2.21.

Lemat 2.22 ([33]). *Niech $S \subseteq \mathbb{Z}$ będzie zbiorem skończonym mocy m , którego elementy dają wszystkie reszty z dzielenia przez m . Wówczas dla dowolnych ciągów $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_n) \in S^n$, jeśli liczba*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{m^i} - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma'_i}{m^i}$$

jest całkowita, to $\sigma_i = \sigma'_i$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dowód. Dowód jest indukcyjny ze względu na n . Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i założmy, że teza zachodzi dla $n - 1$. Jeśli

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{m^i} - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma'_i}{m^i} \in \mathbb{Z},$$

to

$$\sigma_1 - \sigma'_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\sigma_i}{m^i} - \sum_{i=2}^n \frac{\sigma'_i}{m^i} \in m\mathbb{Z}.$$

Z założenia indukcyjnego $(\sigma_2, \dots, \sigma_n) = (\sigma'_2, \dots, \sigma'_n)$, a stąd $m | (\sigma_1 - \sigma'_1)$ oraz, skoro reszty z dzielenia przez m w zbiorze S są parami różne, $\sigma_1 = \sigma'_1$. $\square$

Warunek (VIII) twierdzenia 2.21 jest spełniony, gdy elementy Σ są liczbami całkowitymi, które dają wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez $|\Sigma|$. Istotnie, pokażemy, że wówczas wystarczy przyjąć $\delta = 1$ oraz $k = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy $p = |\Sigma|$, $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$ oraz zdefiniujmy funkcje $h: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $g: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}$ wzorami

$$h(x) := nx \bmod p,$$

$$g(s) := \varepsilon^s.$$

Wówczas h jest homomorfizmem grup, $h[\mathbb{Z}_p] = \{y \in \mathbb{Z}_p : d|y\}$ jest nietrywialną pod-

grupą dla pewnego dzielnika d liczby p oraz

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \exp \left(\frac{2\pi i n \sigma}{|\Sigma|} \right) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} g(h(x)) = \sum_{s \in h[\mathbb{Z}_p]} g(s) |h^{-1}(s)| = |\ker h| \sum_{j=0}^{\frac{p}{d}-1} \varepsilon^{dj} = 0,$$

gdyż $(\varepsilon^d)^{\frac{p}{d}} = \varepsilon^p = 1$.

Wniosek 2.23. Załóżmy, że dla pewnych $x \in \mathbb{R}$ oraz $\delta > 0$ zbiór $(\Sigma - x)/\delta$ składa się z liczb całkowitych, które dają wszystkie reszty z dzielenia przez $|\Sigma|$. Wówczas $B = \delta\mathbb{Z}$ jest bazą dla E -kafelkowania prostej $\mathbb{R}$, δ jest największym wspólnym dzielnikiem $D(\Sigma)$ oraz $\lambda(E) = \delta$, gdzie $E = E\left(\Sigma, \frac{1}{|\Sigma|}\right)$.

Dowód. Warunek (VIII) twierdzenia 2.21 jest spełniony z δ . Wobec faktu 2.20 możemy bez straty ogólności założyć, że $x = 0 \in \Sigma$. Z założenia o resztach, δ jest największym wspólnym dzielnikiem $D(\Sigma)$.

Wobec stwierdzenia 2 (z dowodu twierdzenia 2.21) zastosowanego do ciągu $(\sigma_i) \equiv 0$, istnieje okresowe E -kafelkowanie prostej $\mathbb{R}$ o bazie B takiej, że

$$B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} q^{-k} F_k + t\mathbb{Z},$$

gdzie $t \neq 0$ jest dowolnym okresem B , oraz dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ liczby dq^{-n} są okresami dla wszystkich $d \in D(\Sigma)$. Skoro δ jest największym wspólnym dzielnikiem $D(\Sigma)$, z rozszerzonego algorytmu Euklidesa istnieją liczby $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$ oraz $d_1, \dots, d_m \in D(\Sigma)$ takie, że $k_1 d_1 + \dots + k_m d_m = \delta$. Zatem liczba δq^{-n} także jest okresem B .

Niech $C := B \cap [0, \delta q^{-n}) \subseteq \delta\mathbb{Z}$. Wtedy, skoro $q^{-k-1} F_k + \Sigma = q^{-k-1} F_{k+1}$, dla każdego $\gamma \in \Sigma/\delta$ zbiór C/δ jest zamknięty na odwzorowanie

$$f_\gamma(x) = (x/q + \gamma) \bmod q^{-n}.$$

Z lematu 2.22 zastosowanego do $S = \Sigma/\delta$, jeśli $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \neq (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n)$, to

$$(f_{\gamma_1} \circ \dots \circ f_{\gamma_n})(x) \neq (f_{\gamma'_1} \circ \dots \circ f_{\gamma'_n})(x).$$

Zatem

$$\{0, 1, \dots, q^{-n} - 1\} \subseteq C/\delta,$$

oraz $B = \delta\mathbb{Z}$.

Niech $E_k = E \cap \delta[k, k+1)$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$\lambda((E_k - k\delta) \cap (E_l - l\delta)) \leq \lambda((E - k\delta) \cap (E - l\delta)) = \lambda(E \cap (E + \delta(k-l))) = 0,$$

o ile $k \neq l$. Stąd

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(E_k) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(E_k - k\delta) = \lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (E_k - k\delta)\right) = \lambda([0, \delta)) = \delta. \quad \square\end{aligned}$$

Założmy, że $0 \in \Sigma \subseteq \mathbb{Z}$. Warunek, że Σ elementy Σ podzielone przez największy wspólny dzielnik dają wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez $|\Sigma|$, w ogólności nie jest równoważny warunkowi (VIII) twierdzenia 2.21. Świadczy o tym na przykład zbiór $\Sigma = \{0, 1, 8, 9\}$, który spełnia warunek (VIII), a $E\left(\Sigma, \frac{1}{|\Sigma|}\right)$ jest sumą dwóch rozłącznych przedziałów.

Równoważność dostajemy za to w przypadku, gdy $|\Sigma|$ jest liczbą pierwszą, patrz wniosek 2.25. W jego dowodzie wykorzystamy własności wielomianów cyklotomicznych. n -tym wielomianem cyklotomicznym nazywamy wielomian

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{nw}(k, n) = 1}} \left(X - \exp\left(2\pi i \frac{k}{n}\right) \right).$$

Jak wiadomo z algebry, patrz [28, s. 279], wielomian Φ_n ma współczynniki całkowite i jest nierozkładalny nad $\mathbb{Q}$. Wynika stąd, że jest on wielomianem minimalnym nad $\mathbb{Q}$ dla każdego ze swoich pierwiastków. Wielomian minimalny liczby algebraicznej $\alpha \in \mathbb{C}$ dzieli każdy wielomian W o współczynnikach wymiernych, którego α jest pierwiastkiem.

Lemat 2.24. *Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą oraz $k \in \mathbb{N}$. Jeśli $\Sigma \subseteq \mathbb{Z}$ jest zbiorem mocy p oraz*

$$\sum_{s \in \Sigma} \exp\left(\frac{2\pi i s}{p^k}\right) = 0,$$

to $\left\{\exp\left(\frac{2\pi i s}{p^k}\right) : s \in \Sigma\right\}$ jest zbiorem wierzchołków wielokąta foremego.

Dowód. Niech $\Sigma \bmod p^k = \{s_0, \dots, s_{p-1}\}$, gdzie $s_0 \leq \dots \leq s_{p-1}$. Wybieramy j tak, żeby

$$s_{j+1} - s_j = \max\{s_{i+1} - s_i : i = 0, \dots, p-1\} \geq p^{k-1},$$

gdzie dodatkowo $s_p := s_0$. Możemy założyć, że $\max(\Sigma \bmod p^k) = p^k - p^{k-1}$, gdyż w przeciwnym razie przesuwamy Σ (o liczbę całkowitą) w ten sposób, że s_j przechodzi na $p^k - p^{k-1}$.

Niech $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{p^k}\right)$. Z założenia mamy

$$0 = \varepsilon^{s_0} + \dots + \varepsilon^{s_{p-1}},$$

tzn. ε jest pierwiastkiem wielomianu

$$X^{s_0} + \dots + X^{(p-1)p^{k-1}}.$$

Z drugiej strony, wielomian minimalny liczby ε nad $\mathbb{Q}$ to

$$\Phi_{p^k}(X) = 1 + X^{p^{k-1}} + X^{2p^{k-1}} + \dots + X^{(p-1)p^{k-1}},$$

porównaj [28, s. 280]. □

Wniosek 2.25. *Niech $|\Sigma| \cdot q = 1$, gdzie $|\Sigma| = p$ jest liczbą pierwszą. Wówczas $E(\Sigma, q)$ zawiera przedział wtedy i tylko wtedy, gdy $(\Sigma - x)/\delta$ daje wszystkie reszty z dzielenia przez p dla pewnych $x \in \mathbb{R}$ oraz $\delta > 0$.*

Dowód. Załóżmy, że $E(\Sigma, q)$ zawiera przedział. Z twierdzenia 2.21 istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \exp\left(\frac{2\pi i n \sigma q^k}{\delta}\right) = 0.$$

Z dowodu twierdzenia 2.21 wynika, że δ może być wybrane jako największy wspólny dzielnik zbioru $D(\Sigma)$. Kładziemy $\Sigma^* = (\Sigma - x)/\delta$, gdzie $x = \min \Sigma$. Wówczas $\Sigma^* \subseteq \mathbb{Z}$ oraz istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{s \in \Sigma^*} \exp\left(\frac{2\pi i s}{p^k}\right) = 0.$$

Wobec lematu 2.24 mamy

$$\left\{ \exp\left(\frac{2\pi i s}{p^k}\right) : s \in \Sigma^* \right\} = \left\{ \exp\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) : t \in \{0, 1, \dots, p-1\} \right\},$$

oraz

$$\Sigma^* \bmod p = p^{k-1} \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

Skoro elementy Σ^* są względnie pierwsze, dostajemy $k = 1$.

Implikacja przeciwna wynika z twierdzenia 2.21, gdyż warunek (VIII) jest spełniony z δ . □

W przestrzeni metrycznej X wymiar Hausdorffa podzbioru $A \subseteq X$ określa się jako

$$\dim_H(A) = \inf\{s \in [0, \infty) : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s \in [0, \infty) : \mathcal{H}^s(A) = +\infty\},$$

gdzie $\mathcal{H}^s$ oznacza s -wymiarową miarę Hausdorffa

$$\mathcal{H}^s(A) := \alpha(s) \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } A_i)^s : A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \text{diam } A_i \leq \delta \right\}.$$

Liczba $\alpha(s) \in (0, \infty)$ jest tutaj stałą zależną od s , która jest wybierana na różne sposoby przez różnych autorów, ale wymiar Hausdorffa jest od tego niezależny. My przyjmujemy dla prostoty $\alpha(s) \equiv 1$. Własności miar Hausdorffa w zakresie potrzebnym do zdefiniowania wymiaru opisane są np. w podręczniku [13, s. 81–86].

Fakt 2.26. *Niech $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ będzie zbiorem skończonym oraz $q = \frac{1}{|\Sigma|}$. Jeśli $E(\Sigma, q)$ ma wymiar Hausdorffa 1, to $|F_n(\Sigma, q)| = |\Sigma|^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Załóżmy, że $|F_n| = k < |\Sigma|^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$ mamy $|F_{mn}| \leq |F_n|^m = k^m$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że

$$q^{m_\varepsilon n} \text{diam } E < \varepsilon.$$

Skoro $E = F_{m_\varepsilon n} + q^{m_\varepsilon n} E$, to dla każdego $s > 0$ zachodzi

$$H^s(E) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |F_{m_\varepsilon n}| (q^{m_\varepsilon n} \text{diam } E)^s \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (kq^{ns})^m (\text{diam } E)^s,$$

gdzie H^s oznacza s -wymiarową miarę Hausdorffa. Skoro

$$kq^{ns} < 1 \iff s > \frac{1}{n} \log_{|\Sigma|}(k),$$

to dostajemy

$$\dim_H(E) \leq \frac{1}{n} \log_{|\Sigma|}(k) < 1. \quad \square$$

3 Zbiory podsum na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$

W odróżnieniu od prostej, charakteryzacja topologiczna zbiorów podsum na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ jak dotychczas nie jest znana. Podstawowe przykłady różnych typów homeomorficznych dostarcza następujący fakt.

Fakt 3.1. *Niech I będzie przedziałem domkniętym, C będzie zbiorem Cantora, a M będzie M -Cantorvalem. Dla każdego ze zbiorów: $\{0\}$, I , C , M , $I \times I$, $I \times C$, $I \times M$, $C \times M$ lub $M \times M$, istnieje szereg bezwzględnie zbieżny $\sum_n (x_n, y_n)$ na płaszczyźnie taki, że $A(x, y)$ jest homeomorficzny z tym zbiorem.*

Dowód. Gdy $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ są szeregami rzeczywistymi bezwzględnie zbieżnymi, to

$$A((x_1, 0), (0, y_1), (x_2, 0), (0, y_2), \dots) = A(x_n) \times A(y_n). \quad \square$$

Za publikacją [26] stosujemy następujące nazewnictwo. Podzbiór płaszczyzny jest *typu* $V \times W$, gdzie $V, W \in \{I, C, M\}$, gdy jest on skończoną sumą zbiorów homeomorficznych z $V \times W$. Z kolei zbiór jest *typu* W , gdy jest on skończoną sumą zbiorów homeomorficznych z W . Składowe spójności zbiorów wymienionych w fakcie 3.1 to kwadraty domknięte, odcinki domknięte lub zbiory jednopunktowe. Jednak istnieją zbiory podsum o składowych innych niż homeomorficzne kopie kwadratu, odcinka lub punktu. Podamy teraz przykłady takich zbiorów podsum. Przykłady te są opisane w artykule [26].

1. **Skończone sumy kwadratów.** Kwadrat jednostkowy $[0, 1]^2$ jest zbiorem podsum ciągu $s = ((\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, 0), (0, \frac{1}{4}), \dots)$. Rozważmy następujące ciągi:

(a) $\underbrace{((1, 1), \dots, (1, 1))}_{n \text{ razy}}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\underbrace{((1, 1), \dots, (1, 1))}_{n \text{ razy}}, \underbrace{((-1, 1), \dots, (-1, 1))}_{m \text{ razy}}$ dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}$;

$$(c) \underbrace{\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \dots, \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)}_{n \text{ razy}}, \underbrace{\left((-1, 1), \dots, (-1, 1)\right)}_{m \text{ razy}} \text{ dla pewnych } n, m \in \mathbb{N};$$

$$(d) \left((- \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), \underbrace{\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \dots, \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)}_{n \text{ razy}}\right) \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}.$$

Zbiór podsum otrzymany przed poprzedzeniem ciągu s każdym z ciągów w punktach (a)–(d) jest zbiorem spójnym. Ponadto żadne dwa zbiory otrzymane w ten sposób nie są homeomorficzne.

2. **Nieskończone sumy kwadratów.** Suma algebraiczna skończonej ilości zbiorów podsum jest zbiorem podsum, gdyż

$$A(x_1^1, \dots, x_1^k, x_2^1, \dots, x_2^k, \dots) = A(x_1^1) + \dots + A(x_n^k).$$

Możliwe jest więc otrzymanie jako zbioru podsum sumy kwadratu jednostkowego $[0, 1]^2$, zbioru skończonego $\{(-k, k) : k \in \{0, \dots, m\}\}$ oraz zbioru $\{(x, x) : x \in A(x_n)\}$, gdzie szereg rzeczywisty $\sum x_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

(a) Jeśli $(x_n) = (\frac{2}{3}, \dots, \frac{2}{3^n}, \dots)$, to otrzymany zbiór podsum

$$[0, 1]^2 + \{(-k, k) : k \in \{0, \dots, m\}\} + A(x_n)$$

jest zbiorem spójnym typu $I \times I$, którego dopełnienie ma nieskończenie wiele składowych, gdyż $A(x_n)$ jest zbiorem Cantora.

(b) Jeśli $(x_n) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{3}{4^n}, \frac{2}{4^n}, \dots)$, to otrzymany zbiór podsum również jest zbiorem spójnym typu $I \times I$, gdyż $A(x_n)$ jest M-Cantorvałem.

3. **Skończone sumy typu $M \times I$.** Niech $M = A(x_n)$ oznacza M-Cantorval, który jest zbiorem podsum ciągu

$$(x_n) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{3}{4^n}, \frac{2}{4^n}, \dots\right).$$

Zbiór $A = [0, 1] \times M \cup ((x, y) + [0, 1] \times M)$ jest zbiorem podsum dla dowolnego punktu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Jeśli $(x, y) = (1, 1)$, to składowa punktu $(1, \frac{5}{3})$ w zbiorze A jest sumą prostokąta domkniętego oraz odcinka, które mają jeden punkt wspólny.

(b) Jeśli $(x, y) = (1, \frac{1}{3})$, to wnętrze składowej punktu $(1, 1)$ w A jest niespójne.

(c) Jeśli $(x, y) = (1, \frac{1}{6})$, to składowa C punktu $(1, 1)$ w A ma nieskończenie wiele punktów x takich, że $C \setminus \{x\}$ jest niespójny, zaś wnętrze C jest spójne.

Ponieważ homeomorfizm między podzbiorami płaszczyzny przenosi wnętrza na wnętrza, porównaj [15, Corollary 5.18], składowe omawiane w punktach (a)–(c) są parami niehomeomorficzne.

Wobec charakteryzacji Guthriego–Nymanna, zobacz twierdzenie 2.6, pojawia się naturalne pytanie, czy istnieje zbiór podsum na płaszczyźnie innego typu topologicznego niż te występujące w fakcie 3.1. Odpowiadamy na to pytanie negatywnie, zobacz wniosek 3.3 lub porównaj [26].

Gdy $\sum_n x_n$ jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym oraz $P \subseteq \mathbb{R}$ jest zbiorem skończonym, to

$$S(P, (x_n)) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} p_n x_n : (p_n) \in P^{\mathbb{N}} \right\}$$

nazywamy *zbiorem P -sum* wyznaczonym przez ciąg (x_n) oraz zbiór P . Ponieważ

$$A(x_n) = S(\{0, 1\}, (x_n)),$$

więc pojęcie zbioru P -sum jest uogólnieniem pojęcia zbioru podsum. O ile mi wiadomo, własności zbiorów P -sum po raz pierwszy badali J. E. Nymann oraz R. Sáenz, [35].

Gdy $A \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz $y \in \mathbb{R}$ to symbol A_y oznacza cięcie poziome

$$A_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}.$$

Jedna z naszych hipotez mówiła, że cięcie zbioru podsum na płaszczyźnie przez oś OX jest zbiorem podsum w $\mathbb{R}$. Hipoteza ta okazała się fałszywa, co pokazuje kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 3.2 ([26, Theorem 4.1]). *Niech $\sum_n a_n$ będzie szeregiem rzeczywistym bezwzględnie zbieżnym, a $P \subseteq \mathbb{R}$ zbiorem skończonym takim, że $0 \in P$. Wówczas istnieje zbiór podsum $A(x, y)$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ taki, że $A(x, y)_0 = S(P, (a_n))$.*

Dowód. Gdy $P = \{0\}$, to wystarczy przyjąć $(x_n, y_n) = (0, 0)$. Załóżmy, że $|P| = k > 1$ i oznaczmy $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{k-1}\}$, gdzie $p_0 = 0$. Niech (b_n) będzie ciągiem takim, że $(k-1) \sum_{i>n} b_i < b_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, np. ciągiem geometrycznym o ilorazie $q < \frac{1}{k}$. Kładziemy

$$(x_m) = (0, p_1 a_1, \dots, p_{k-1} a_1, 0, p_1 a_2, \dots, p_{k-1} a_2, \dots),$$

$$(y_m) = (b_1, \underbrace{-b_1, \dots, -b_1}_{k-1 \text{ razy}}, b_2, \underbrace{-b_2, \dots, -b_2}_{k-1 \text{ razy}}, \dots),$$

tzn. $x_{kn+1} = 0$, $y_{kn+1} = b_{n+1}$, $x_{kn+i} = p_{i-1} a_{n+1}$, $y_{kn+i} = -b_{n+1}$ dla $i = 2, \dots, k$ oraz $n \in \mathbb{N}_0$. Pokażemy, że $A(x, y)_0 = S(P, (a_n))$.

Ustalmy $t \in A(x, y)_0$. Wówczas $(t, 0) \in A(x, y)$, więc istnieje zbiór $B \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $(t, 0) = \sum_{l \in B} (x_l, y_l)$. Wykażemy indukcyjnie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ następujące warunki są równoważne:

- (i) $kn + 1 \in B$;
- (ii) $\exists_{i \in \{2, \dots, k\}} kn + i \in B$;
- (iii) $\exists!_{i \in \{2, \dots, k\}} kn + i \in B$.

Ustalmy $n \in \mathbb{N}_0$ i załóżmy, że dla wszystkich $m < n$ zachodzi równoważność warunków (i)–(iii) z m w miejscu n . Ze względu na postać ciągu (y_m) dostajemy

$$\sum_{\substack{l \leq kn \\ l \in B}} y_l = 0.$$

Dla dowodu implikacji (i) $\Rightarrow$ (ii) przypuśćmy, że $kn + 1 \in B$ oraz $kn + i \notin B$ dla wszystkich $i \in \{2, \dots, k\}$. Wówczas otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l \in B} y_l = \sum_{\substack{l > kn \\ l \in B}} y_l = y_{kn+1} + \sum_{\substack{l > k(n+1) \\ l \in B}} y_l \geq \\ &\geq b_{n+1} + \sum_{m > n} \sum_{i=2}^k y_{km+i} = b_{n+1} - \sum_{m > n+1} (k-1)b_m > 0, \end{aligned}$$

co jest niemożliwe. Teraz pokażemy jednocześnie implikacje (ii) $\Rightarrow$ (i) oraz (ii) $\Rightarrow$ (iii). Załóżmy, że $kn + i \in B$ dla pewnego $i \in \{2, \dots, k\}$ i przypuśćmy, że $kn + 1 \notin B$ lub $kn + i' \in B$ dla pewnego $i' \in \{2, \dots, k\}$ różnego od i . Wówczas

$$\sum_{\substack{kn < l \leq k(n+1) \\ l \in B}} y_l \leq -b_{n+1},$$

a więc

$$0 = \sum_{l \in B} y_l = \sum_{\substack{l > kn \\ l \in B}} y_l \leq -b_{n+1} + \sum_{m > n} y_{km+1} = -b_{n+1} + \sum_{m > n+1} b_m < 0,$$

co także jest niemożliwe. To kończy dowód równoważności warunków (i)–(iii).

Istnieje ciąg $(j_n) \in \{0, 1, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}_0}$ taki, że $t = \sum_{n=1}^{\infty} p_{j_{n-1}} a_n$. Istotnie, dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$, gdy zachodzą warunki (i)–(iii), to przyjmujemy $j_n \in \{1, \dots, k-1\}$ tak, żeby $kn + j_n + 1 \in B$, a w przeciwnym razie $j_n = 0$. Zatem $t \in S(P, (a_n))$.

Na odwrót, ustalmy $t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n \in S(P, (a_n))$, gdzie $(c_n) \in P^{\mathbb{N}}$. Określamy

podzbiór $B \subseteq \mathbb{N}$ w ten sposób, żeby dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ zachodziły warunki

$$c_{n+1} = 0 \iff \{kn + 1, \dots, kn + k\} \cap B = \emptyset \text{ oraz}$$

$$c_{n+1} = p_i \iff \{kn + 1, \dots, kn + k\} \cap B = \{kn + 1, kn + i + 1\} \text{ dla } i > 0.$$

Wówczas

$$\sum_{l \in B} x_l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{kn < l \leq k(n+1) \\ l \in B}} x_l = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} a_{n+1} = t,$$

gdyż

$$\sum_{\substack{kn < l \leq k(n+1) \\ l \in B}} x_l = x_{kn+1} + x_{kn+i+1} = p_i a_{n+1} = c_{n+1} a_{n+1}$$

w przypadku, gdy $c_{n+1} = p_i$ dla $i > 0$. Z kolei

$$\sum_{l \in B} y_l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{kn < l \leq k(n+1) \\ l \in B}} y_l = 0,$$

gdyż

$$\sum_{\substack{kn < l \leq k(n+1) \\ l \in B}} y_l = y_{kn+1} + y_{kn+i+1} = b_{n+1} - b_{n+1} = 0$$

w przypadku, gdy $c_{n+1} = p_i$ dla $i > 0$. □

Wniosek 3.3. *Istnieje zbiór podsum $A(x, y)$ na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, który nie jest żadnego typu spośród wymienionych w fakcie 3.1.*

Dowód. Niech $(x_n) = (0, 1, 2, 9; \frac{1}{3})$ oraz $(y_n) = (1, -1, -1, -1; \frac{1}{6})$. Z dowodu twierdzenia 3.2 wynika, że $A(x, y)_0 = S(P, (a_n))$, gdzie $P = \{0, 1, 2, 9\}$ oraz $(a_n) = \frac{1}{3^n}$. Zbiór $S(P, (a_n))$ jest L-Cantorvalem oraz $[0, \frac{9}{8}]$ jest jego składową, zobacz [35] oraz [36]. Mamy $A(|y_n|) = E(\Sigma, q)$, gdzie $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ oraz $q = \frac{1}{6}$. Wobec twierdzenia 2.7(a) zbiór $A(|y_n|)$ jest zbiorem Cantora, zaś z faktu 2.3 zbiór $A(y_n)$ jest homeomorficzny z $A(|y_n|)$.

Pokażemy teraz, że

(#) dla każdego $t \in (0, \frac{9}{8})$ oraz $\varepsilon > 0$ istnieje trywialna składowa zbioru $A(x, y)$ w kuli $K = K((t, 0), \varepsilon)$.

Ustalmy $t \in (0, \frac{9}{8})$ oraz $\varepsilon > 0$. Zbiór P-sum skończonych jest gęsty w $S(P, (a_n))$, więc istnieje ciąg skończony $(c_i) \in \{0, 1, 2, 9\}^m$ taki, że $u := \sum_{i=1}^m c_i a_i \in (t - \frac{\varepsilon}{2}, t + \frac{\varepsilon}{2})$. Z drugiej części dowodu twierdzenia 3.2 wynika, że $(u, 0) = \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i(x_i, y_i)$, gdzie $\varepsilon_{4n+1} = 1 \iff c_n \neq 0$, $\varepsilon_{4n+2} = 1 \iff c_n = 1$, $\varepsilon_{4n+3} = 1 \iff c_n = 2$ oraz $\varepsilon_{4n+4} = 1 \iff c_n = 9$. Dobieramy $l > m$ tak, żeby $b := \sum_{i>l} \frac{1}{6^i} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Gdy $k \in \mathbb{N}$ oraz ciąg (b_n) spełnia warunek $k \sum_{i>n} b_i < b_n$, to dla ciągu

$$(y_n) = (b_1, \underbrace{-b_1, \dots, -b_1}_{k-1 \text{ razy}}, b_2, \underbrace{-b_2, \dots, -b_2}_{k-1 \text{ razy}}, \dots)$$

zachodzi następujący warunek:

- Jeśli $\sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in A} y_i$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest

$$\sum_{\substack{i \leq n \\ i \in I}} b_i = \sum_{\substack{i \leq 4n \\ i \in A}} y_i,$$

a w szczególności zachodzi implikacja:

$$i \in I \implies A \cap \{ki + 1, \dots, ki + k\} = \{ki + 1\}.$$

Stosujemy powyższą własność do $k = 4$ i ciągu o wzorze $b_i = \frac{1}{6^i}$. Mianowicie, z warunku $b = \sum_{n \in A} y_n$ wynika, iż dla $i > l$ zbiór A zawiera wszystkie indeksy postaci $4i + 1$ i nie zawiera innych indeksów. Zatem w zbiorze $A(x, y)$ istnieje tylko skończenie wiele elementów postaci (c, b) , gdzie c jest dowolne. Ponieważ $A(y)$ jest zbiorem Cantora, więc każda składowa zbioru $A(x, y)$ zawiera się w pewnej prostej poziomej, a stąd $\{(u, b)\}$ jest trywialną składową zbioru $A(x, y)$, która ponadto leży w kuli K .

Zbiór $A(x, y)$ ma puste wnętrze, więc nie może być typu $I \times I$, $I \times M$ lub $M \times M$. Zbiór $A(x, y)$ zawiera składowe nietrywialne, więc nie może być zbiorem skończonym lub zbiorem Cantora. Nie może być też typu I lub $C \times I$, gdyż zawiera składowe trywialne. Nie jest też typu M , gdyż nie spełnia własności $(\star)$.

Pozostaje pokazać, że $A(x, y)$ nie może być typu $C \times M$. Dla zbioru S homeomorficznego z $C \times M$ rozważmy zbiór $T(S) \subseteq S$ równy sumie wszystkich składowych trywialnych oraz końców łuków będących składowymi nietrywialnymi. Ponieważ brzeg M-Cantorala jest zbiorem Cantora, więc $T(S)$ także jest zbiorem Cantora. Przypuśćmy, że $A(x, y) = S_1 \cup \dots \cup S_n$, gdzie każdy ze zbiorów S_i jest homeomorficzny z $C \times M$. Wówczas zbiór $T := T(S_1) \cup \dots \cup T(S_n)$ jest całkowicie niespójny. Dla każdego nietrywialnego spójnego podzbioru $A \subseteq A(x, y)$ (w szczególności dla $A := (0, \frac{9}{8}) \times \{0\}$) mamy $A \not\subseteq T$, więc istnieją punkt $z \in A \setminus T$ oraz (wobec domkniętości T) $\varepsilon > 0$ takie, że $K(z, \varepsilon) \cap T = \emptyset$. Jest to sprzeczne z otrzymaną wcześniej własnością $(\#)$. $\square$

4 Centrum dystansów

Pojęcie centrum dystansów zostało wprowadzone w artykule [7]. Mianowicie, gdy (X, d) jest przestrzenią metryczną, to zbiór

$$S(X) := \{a \in [0, \infty) : \forall x \in X \exists y \in X d(x, y) = a\}$$

nazywamy *centrum dystansów* przestrzeni X . To pojęcie jak dotychczas znalazło zastosowanie głównie dla podzbiorów prostej $\mathbb{R}$. Dla przykładu, centrum dystansów zostało użyte w dowodach o niemożliwości przedstawienia ustalonego zbioru (najczęściej Cantorala) jako zbioru podsum szeregu liczbowego, patrz [7] lub [5]. Dokładne obliczenie centrum dystansów ustalonego zbioru jest często interesujące samo w sobie, np. dla centralnych zbiorów Cantora [2]. W artykule [3] zapoczątkowano dociekania, jakie zbiory mogą być centrami dystansów. Na konferencjach ‘Inspirations in Real Analysis II’ (2024) oraz ‘46th Summer Symposium in Real Analysis’ (2024) Małgorzata Filipczak pytała co następuje.

Pytanie. Czy każdy zbiór $A \subseteq [0, \infty)$, gdzie $0 \in A$, jest centrum dystansów pewnego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$?

Podamy tutaj pozytywną odpowiedź, zobacz twierdzenie 4.2, a następnie wzmocnimy wynik poprzez pokazanie, że X może być zbiorem Bernsteina.

Niech $C \subseteq \mathbb{R}$ będzie ustalonym zbiorem. Rozważamy operator

$$T_C : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

określony wzorem

$$T_C(Y) = \left\{ \frac{1}{2}(y + y') : y, y' \in Y \right\} \setminus C,$$

tzn. do $T_C(Y)$ należą wszystkie środki elementów zbioru Y za wyjątkiem elementów

z C . Kładziemy

$$T_C^n(Y) := \underbrace{(T_C \circ \dots \circ T_C)}_n(Y) \quad \text{oraz} \quad T_C^\infty(Y) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_C^n(Y).$$

Gdy $C \cap Y = \emptyset$, to $Y \subseteq T_C(Y) \subseteq T_C^\infty(Y)$, a ponadto

$$T_C(T_C^\infty(Y)) = T_C^\infty(Y).$$

Istotnie, jeśli $t \in T_C(T_C^\infty(Y))$, to istnieją $n \in \mathbb{N}$ oraz $u, u' \in T_C^n(Y)$ takie, że $t = \frac{1}{2}(u + u') \notin C$, tzn. $t \in T_C(T_C^n(Y)) = T_C^{n+1}(Y) \subseteq T_C^\infty(Y)$. Poniższy lemat dokładniej precyzuje kiedy $v \in T_C^n(Y)$.

Lemat 4.1. *Jeśli $C \subseteq \mathbb{R}$, $Y \subseteq \mathbb{R} \setminus C$ oraz $v \in T_C^n(Y)$, to istnieje funkcja $d: 2^{\leq n} \rightarrow T_C^n(Y)$ taka, że*

- (I) $d(\emptyset) = v$;
- (II) $d(s) = \frac{1}{2}(d(s \frown 0) + d(s \frown 1))$ dla $s \in 2^{< n}$;
- (III) $d(s) \in Y$ dla $s \in 2^n$;
- (IV) $d(s) \notin C$ dla $s \in 2^{\leq n}$.

Ponadto, jeśli $Y = \{x - b, x + b\}$ oraz $x \in C$, to $d(s) = x - b$ dla wszystkich $s \in 2^{\leq n}$ lub $d(s) = x + b$ dla wszystkich $s \in 2^{\leq n}$.

Dowód. Niech $C \subseteq \mathbb{R}$ oraz $Y \subseteq \mathbb{R} \setminus C$. Dowód będzie indukcyjny względem n . Gdy $n = 0$, to teza jest oczywista. Załóżmy indukcyjnie, że teza zachodzi dla $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy

$$v \in T_C^{n+1}(Y) = T_C(T_C^n(Y)),$$

a więc istnieją $v_0, v_1 \in T_C^n(Y)$ takie, że $v = \frac{1}{2}(v_0 + v_1) \notin C$. Korzystając z założenia indukcyjnego, dobieramy funkcje $d_0, d_1: 2^{\leq n} \rightarrow T_C^n(Y)$ takie, że $d_i(\emptyset) = v_i$ oraz warunki (II)–(IV) z d_i w miejscu d są spełnione. Następnie definiujemy $d: 2^{\leq n+1} \rightarrow T_C^{n+1}(Y)$ w ten sposób, że $d(\emptyset) = v$, $d(0 \frown s) = d_0(s)$ oraz $d(1 \frown s) = d_1(s)$ dla $s \in 2^{\leq n}$.

Jeśli dodatkowo $Y = \{x - b, x + b\}$ oraz $x \in C$, to $T_C^n(Y) = Y$, a więc wtedy funkcja d będzie stała. $\square$

Dowód kolejnego twierdzenia korzysta z dobrego uporządkowania podzbiorów prostej rzeczywistej. Mimo to czasami można otrzymać dodatkowe własności konstruowanych zbiorów. Dla przykładu, gdy $[0, \infty) \setminus A$ jest zbiorem skończonym, to istnieje zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$, którego dopełnienie jest przeliczalne oraz $S(X) = A$.

Twierdzenie 4.2. Dla każdego zbioru $A \subseteq [0, \infty)$, gdzie $0 \in A$, istnieje zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $S(X) = A$.

Dowód. Ustalmy zbiór $A \subseteq [0, \infty)$ taki, że $0 \in A$. Rozważmy ciąg pozaskończony (b_α) taki, że

$$[0, \infty) \setminus A = \{b_\alpha : \alpha < \kappa\},$$

gdzie $\kappa = |[0, \infty) \setminus A| \leq \mathfrak{c}$. Indukcyjnie dobieramy ciąg pozaskończony liczb rzeczywistych $(x_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ taki, że stale

$$(1) \quad x_\alpha \notin \text{lin}_{\mathbb{Q}}(\{b_\beta : \beta \leq \alpha\} \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\}).$$

Następnie kładziemy $X := \mathbb{R} \setminus T_C^\infty(Y)$, gdzie

$$Y := \bigcup_{\alpha < \kappa} \{x_\alpha - b_\alpha, x_\alpha + b_\alpha\} \text{ oraz } C := \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}.$$

Bezpośrednio z warunku (1) dostajemy $C \cap Y = \emptyset$. Dla każdego $\alpha < \kappa$ punkt $x_\alpha \in X$ świadczy o tym, że $b_\alpha \notin S(X)$, a więc

$$S(X) \subseteq [0, \infty) \setminus \{b_\alpha : \alpha < \kappa\} = A.$$

Aby uzasadnić inkluzję przeciwną, ustalmy $b \in [0, \infty) \setminus S(X)$. Wtedy istnieje $x \in X$ taki, że $x + b, x - b \notin X$. Ponieważ $x \notin T_C^\infty(Y) = T_C(T_C^\infty(Y))$, a jednocześnie x jest środkiem dwóch punktów z $T_C^\infty(Y)$, więc $x \in C$, czyli $x = x_\alpha$ dla pewnego $\alpha < \kappa$.

Stosując lemat 4.1 do $x + b$ oraz $x - b$, dobieramy funkcje $d_0, d_1 : 2^{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $d_0(\emptyset) = x - b$, $d_1(\emptyset) = x + b$ oraz warunki (II)–(IV) z d_i w miejscu d są spełnione.

Wobec warunku (III), dla każdego $s \in 2^n$ istnieją indeksy $\alpha_s, \beta_s < \kappa$ oraz liczby $\delta_s, \varepsilon_s \in \{-1, 1\}$ takie, że

$$(2) \quad d_0(s) = x_{\alpha_s} + \delta_s b_{\alpha_s} \in Y \text{ oraz } d_1(s) = x_{\beta_s} + \varepsilon_s b_{\beta_s} \in Y.$$

Z warunków (I) oraz (II) mamy

$$(3) \quad 2x_\alpha = x + b + x - b = \frac{1}{2^n} \sum_{s \in 2^n} (x_{\alpha_s} + x_{\beta_s} + \delta_s b_{\alpha_s} + \varepsilon_s b_{\beta_s}).$$

Zaś z warunku (1) dostajemy

$$\alpha = \alpha_s = \beta_s \text{ for all } s \in 2^n.$$

Istotnie, w przeciwnym razie kładąc

$$\gamma = \max(\{\alpha\} \cup \{\alpha_s : s \in 2^n\} \cup \{\beta_s : s \in 2^n\}),$$

po przeniesieniu wszystkich składników z x_γ na lewą stronę równości (3), zaś pozostałych na prawą, otrzymujemy sprzeczność z wyborem x_γ .

Zatem $d_1(s) \in \{x_\alpha - b_\alpha, x_\alpha + b_\alpha\}$ dla wszystkich $s \in 2^n$, a więc stosując dodatkową część lematu 4.1, dostajemy $x + b = x_\alpha + b_\alpha$, czyli $b = b_\alpha \notin A$. $\square$

Jak wynika z powyższego dowodu, jeśli $\omega \leq |[0, \infty) \setminus A| = \kappa$, to istnieje $X \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $S(X) = A$ oraz $|\mathbb{R} \setminus X| = \kappa$, bo wtedy dostajemy $\kappa = |C| = |Y| = |T_C^\infty(Y)|$.

4.1 Zbiory Bernsteina a centrum dystansów

Zbiór Bernsteina to podzbiór $B \subseteq \mathbb{R}$ taki, że zarówno B jak i jego dopełnienie przecina każdy nieprzeliczalny domknięty podzbiór $\mathbb{R}$.

Fakt 4.3. *Istnieje zbiór Bernsteina $X \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $S(X) = [0, \infty)$.*

Dowód. Niech $\{F_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ będzie ciągiem wszystkich nieprzeliczalnych domkniętych podzbiorów $\mathbb{R}$. Indukcyjnie wybieramy ciągi $(x_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}$, $(y_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}$ liczb rzeczywistych takie, że

$$x_\alpha \in F_\alpha \setminus \text{lin}_{\mathbb{Q}}(\{x_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}),$$

$$y_\alpha \in F_\alpha \setminus \text{lin}_{\mathbb{Q}}(\{x_\beta : \beta \leq \alpha\} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}).$$

Następnie kładziemy $Y := \{y_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ oraz $X = \mathbb{R} \setminus T_\emptyset^\infty(Y)$. Jeśli

$$a, b \in T_\emptyset^\infty(Y), \text{ to } \frac{1}{2}(a + b) \in T_\emptyset^\infty(Y),$$

a więc $S(X) = [0, \infty)$. Skoro $Y \subseteq T_\emptyset^\infty(Y)$ oraz

$$T_\emptyset^\infty(Y) \cap \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \text{lin}_{\mathbb{Q}}(Y) \cap \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} = \emptyset,$$

to $X \supseteq \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ jest zbiorem Bernsteina. $\square$

Twierdzenie 4.4. *Jeśli $0 \in A \subseteq [0, \infty)$, to istnieje zbiór Bernsteina $X \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $S(X) = A$.*

Dowód. Jeśli $A = [0, \infty)$, to teza została uzasadniona w fakcie 4.3. Załóżmy, że $0 \in A \subsetneq [0, \infty)$ i rozważmy ciąg

$$\{b_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} = [0, \infty) \setminus A \neq \emptyset,$$

gdzie wyrazy b_α mogą się powtarzać. Niech $\{F_\alpha: \alpha < \mathfrak{c}\}$ będzie ciągiem wszystkich nieprzeliczalnych domkniętych podzbiorów $\mathbb{R}$. Indukcyjnie wybieramy ciągi punktów $(x_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}, (y_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}$ takie, że

$$(4) \quad x_\alpha \in F_\alpha \setminus \text{lin}_{\mathbb{Q}}(\{b_\beta: \beta \leq \alpha\} \cup \{x_\beta: \beta < \alpha\} \cup \{y_\beta: \beta < \alpha\}),$$

$$(5) \quad y_\alpha \in F_\alpha \setminus \text{lin}_{\mathbb{Q}}(\{b_\beta: \beta \leq \alpha\} \cup \{x_\beta: \beta \leq \alpha\} \cup \{y_\beta: \beta < \alpha\}).$$

Następnie kładziemy $C := \{x_\alpha: \alpha < \mathfrak{c}\}$, $Y := \bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} \{y_\alpha, x_\alpha + b_\alpha, x_\alpha - b_\alpha\}$. Zbiór

$$X := \mathbb{R} \setminus T_C^\infty(Y)$$

jest zbiorem Bernsteina, bo $C \subseteq X$ oraz $\{y_\alpha: \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq T_C^\infty(Y)$, a liczba $x_\alpha \in X$ świadczy, że $b_\alpha \notin S(X)$, czyli $S(X) \subseteq A$.

Ustalmy $b \in [0, \infty) \setminus S(X)$. Sprawdzamy, że istnieje $\alpha < \mathfrak{c}$ takie, że $x_\alpha + b, x_\alpha - b \in T_C^\infty(Y)$. Korzystając z lematu 4.1, dobieramy funkcje $d_0, d_1: 2^{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $d_0(\emptyset) = x_\alpha - b$, $d_1(\emptyset) = x_\alpha + b$ oraz warunki (II)–(IV) z d_i w miejscu d są spełnione. Analogicznie jak równanie (3) dostajemy

$$(6) \quad 2x_\alpha = \frac{1}{2^n} \sum_{s \in 2^n} (d_0(s) + d_1(s)).$$

Wobec warunku (III), dla każdego $s \in 2^n$ istnieją $\alpha_s, \beta_s < \mathfrak{c}$ takie, że

$$d_0(s) \in \{y_{\alpha_s}, x_{\alpha_s} + b_{\alpha_s}, x_{\alpha_s} - b_{\alpha_s}\} \text{ oraz } d_1(s) \in \{y_{\beta_s}, x_{\beta_s} + b_{\beta_s}, x_{\beta_s} - b_{\beta_s}\}.$$

Niech

$$\gamma := \max(\{\alpha\} \cup \{\alpha_s: s \in 2^n\} \cup \{\beta_s: s \in 2^n\}).$$

Wobec (5) oraz (6), jeśli $d_0(s) = y_{\alpha_s}$ ($d_1(s) = y_{\beta_s}$), to $\alpha_s < \gamma$ (odpowiednio $\beta_s < \gamma$). Następnie sprawdzamy, że $\gamma = \alpha$. Istotnie, w przeciwnym razie $\gamma = \alpha_s$ lub $\gamma = \beta_s$ dla pewnego $s \in 2^n$, a wtedy $d_0(s) = x_\gamma \pm b_\gamma$ lub $d_1(s) = x_\gamma \pm b_\gamma$, co razem (6) przeczy (4). Wobec (4), $d_0(s) \neq y_{\alpha_s}$, $d_1(s) \neq y_{\beta_s}$ oraz $\alpha = \alpha_s = \beta_s$ dla wszystkich $s \in 2^n$, bo w przeciwnym razie wymierny współczynnik przy x_α w równaniu (6) byłby niezerowy. Dalej postępujemy tak jak w dowodzie twierdzenia 4.2, tzn. skoro $d_1(s) \in \{x_\alpha - b_\alpha, x_\alpha + b_\alpha\}$ dla $s \in 2^n$, to $b = b_\alpha \notin A$. $\square$

Bibliografia

- [1] T. Banach, A. Bartoszewicz, M. Filipczak, E. Szymonik. *Topological and measure properties of some self-similar sets*. Topol. Methods Nonlinear Anal. 46 no. 2 (2015), s. 1013–1028.
- [2] M. Banakiewicz. *The center of distances of central Cantor sets*. Results Math. 78 no. 6, Paper No. 234 (2023), 14 s.
- [3] A. Bartoszewicz, M. Filipczak, G. Horbaczewska, S. Lindner, F. Prus-Wiśniowski. *On the operator of center of distances between the spaces of closed subsets of the real line*. Topol. Methods Nonlinear Anal. 63 no. 2 (2024), s. 413–427.
- [4] A. Bartoszewicz, M. Filipczak, F. Prus-Wiśniowski. *Topological and algebraic aspects of subsums of series. Traditional and present-day topics in real analysis*. Faculty of Mathematics and Computer Science, Łódź (2013), s. 345–366.
- [5] A. Bartoszewicz, Sz. Głąb, J. Marchwicki. *Recovering a purely atomic finite measure from its range*. J. Math. Anal. Appl. 467 no. 2 (2018), s. 825–841.
- [6] W. Bielas, M. Kula, Sz. Plewik. *On compact subsets of the reals*. Topology Appl. 346, Paper No. 108854 (2024), 10 s.
- [7] W. Bielas, Sz. Plewik, M. Walczyńska. *On the center of distances*. Eur. J. Math. 4 no. 2 (2018), s. 687–698.
- [8] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney (1968), xii+253 s.
- [9] A. Błaszczak, S. Turek. *Teoria mnogości*. PWN, Warszawa (2009).
- [10] D. L. Cohn. *Measure theory*. Second edition, Birkhäuser Adv. Texts Basler Lehrbücher, Birkhäuser/Springer, New York (2013), xxi+457 s.
- [11] M. Einsiedler, T. Ward. *Ergodic theory with a view towards number theory*. Grad. Texts in Math. 259, Springer-Verlag London, Ltd., London (2011), xviii+481 s.

- [12] R. Engelking. *Topologia ogólna*. PWN, Warszawa (1975).
- [13] L. C. Evans, R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Revised edition, Textb. Math. CRC Press, Boca Raton, FL (2015), xiv+299 s.
- [14] C. Ferens. *On the range of purely atomic probability measures*. Stud. Math. 77 (1984), s. 261–263.
- [15] W. Fulton. *Algebraic topology. A first course*. Grad. Texts in Math. 153, Springer-Verlag, New York (1995), xviii+430 s.
- [16] J. A. Guthrie, J. E. Nymann. *The topological structure of the set of subsums of an infinite series*. Colloq. Math. 55 no. 2 (1988), s. 323–327.
- [17] C. Heil. *A basis theory primer. Expanded edition*. Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser/Springer, New York (2011), xxvi+534 s.
- [18] H. Hornich. *Über beliebige Teilsummen absolut konvergenter Reihen*. Monatsh. Math. Phys. 49 (1941), s. 316–320.
- [19] J. Jakubowski, R. Sztencel. *Wstęp to teorii prawdopodobieństwa*. SCRIPT, Warszawa (2001).
- [20] S. Kakeya. *On the set of partial sums of an infinite series*. Tokyo Math. Ges. 2nd series, 7 (1914), s. 250–251.
- [21] S. Kakeya. *On the partial sums of an infinite series*. Tôhoku Sc. Rep. 3 (1915), s. 159–163.
- [22] R. Kenyon. *Projecting the one-dimensional Sierpiński gasket*. Israel J. Math. 97 (1997), s. 221–238.
- [23] A. Klenke. *Probability theory. A comprehensive course*. Universitext. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2008, xii+616 s.
- [24] E. H. Kronheimer. *Extending the category of linearly ordered spaces*. Bull. London Math. Soc. 29 no. 3 (1997), s. 353–358.
- [25] M. Kula. *Center of distances and Bernstein sets*. Real Anal. Exchange, Advance Publication 1 – 6 (2025). <https://doi.org/10.14321/realanalexch.1739330962>
- [26] M. Kula, P. Nowakowski. *Achievement sets of series in $\mathbb{R}^2$* . Results Math. 79 no. 6, Paper No. 221 (2024), 24 s.

- [27] J. C. Lagarias, Y. Wang. *Self-affine tiles in $\mathbb{R}^n$* . Adv. Math. 121 no. 1 (1996), s. 21–49.
- [28] S. Lang. *Algebra*. Revised third edition, Grad. Texts in Math. 211, Springer-Verlag, New York (2002), xvi+914 s.
- [29] S. Mazurkiewicz, W. Sierpiński. *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables*. Fund. Math. 1 (1920), s. 17–27.
- [30] P. Mendes, F. Oliveira. *On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets*. Nonlinearity 7 no. 2 (1994), s. 329–343.
- [31] J. Mioduszewski. *Wykłady z topologii. Topologia przestrzeni euklidesowych*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice (1994).
- [32] R. L. Moore, J. R. Kline. *On the most general plane closed point-set through which it is possible to pass a simple continuous arc*. Ann. of Math. 2nd series, 20 no. 3 (1919), s. 218–223.
- [33] Z. Nitecki. *Cantorvals and subsum sets of null sequences*. Amer. Math. Monthly 122 no. 9 (2015), s. 862–870.
- [34] Z. Nitecki. *Subsum Sets: Intervals, Cantor Sets, and Cantorvals*. Preprint, arXiv: 1106.3779v2, Dostęp 17 marca 2025.
- [35] J. E. Nymann, R. Sáenz. *The topological structure of the set of P -sums of a sequence*. Publ. Math. Debrecen 50 no. 3–4 (1997), s. 305–316.
- [36] J. E. Nymann, R. Sáenz. *The topological structure of the set of P -sums of a sequence. II*. Publ. Math. Debrecen 56 no. 1–2 (2000), s. 77–85.
- [37] Sz. Plewik, M. Walczyńska. *On metric σ -discrete spaces. Algebra, logic and number theory*. Banach Center Publ. 108, Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warszawa (2016), s. 239–253.
- [38] W. Rudin. *Real and complex analysis*. Third edition, McGraw-Hill Book Co., New York (1987), xiv+416 s.
- [39] A. Schief. *Separation properties for self-similar sets*. Proc. Amer. Math. Soc. 122 no. 1 (1994), s. 111–115.
- [40] B. Solomyak, *Notes on Bernoulli convolutions. Fractal geometry and applications: a jubilee of Benoît Mandelbrot. Part 1*, s. 207–230. Proc. Sympos. Pure Math. 72, Part 1, American Mathematical Society, Providence, RI (2004).

- [41] B. Solomyak, *On the random series $\sum \pm \lambda^n$ (an Erdős problem)*, Ann. of Math. 2nd series, 142 no. 3 (1995), s. 611–625.
- [42] P. P. Varjú. *Recent progress on Bernoulli convolutions*. European Congress of Mathematics, European Mathematical Society, Zürich (2018), s. 847–867.
- [43] M. Walczyńska. *Zastosowania teorii kategorii w topologii ogólnej*. Prac. dokt. 2018. URL: <http://hdl.handle.net/20.500.12128/4979>
- [44] A. D. Weinstein, B. Z. Shapiro. *On the structure of a set of $\bar{\alpha}$ -representable numbers*. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1980, no. 5, s. 8–11.
- [45] S. Willard. *General topology*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY (2004).