

dr hab. Franciszek Prus-Wiśniowski Szczecin, dnia 5 września 2025 roku.
Instytut Matematyki
Uniwersytet Szczeciński

Recenzja pracy doktorskiej magistra Mateusza Kuli

Tytuł rozprawy: Zbiory podsum szeregów liczbowych zbieżnych

Promotor: prof. dr hab. Szymon Plewik

Promotor pomocniczy: dr Wojciech Bielas

Rozprawa doktorska pana magistra Mateusza Kuli jest napisana w języku polskim i została przygotowana w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego. Składa się z czterech rozdziałów i zawiera prawie 60 stron tekstu matematycznego. Wyniki przedstawione w ocenianej rozprawie niemal w całości pochodzą z czterech poniższych prac, które uszeregowałem w kolejności ich upublicznienia:

- [1] W. Bielas, M. Kula, Sz. Plewik, *On compact subsets of the reals*, Topology Appl. 346, Paper No. 108854 (2024), 10 str.
- [2] M. Kula, P. Nowakowski, *Achievement sets of series in $\mathbb{R}^2$* , Results Math. 79 no. 6, Paper No. 221 (2024), 24 str.
- [3] M. Kula, *Center of distances and Bernstein sets*, Real Anal. Exchange 50 (1) 207 - 212, (2025).
- [4] Sz. Głąb, M. Kula, *Kenyon theorem revisited*, arXiv: 2508.19454v1 [math GN] 26Aug2025

Poniżej omawiam skrótowo i oceniam zawartość wszystkich czterech rozdziałów po kolei.

Rozdział 1: Zwarte podzbiory prostej

Wyniki przedstawione w tym rozdziale zasadniczo pochodzą z pracy [1]. Głównym rezultatem tego rozdziału jest Tw. 1.1, które ustanawia, że warunek

dowolna nietrywialna składowa L przestrzeni X jest łukiem o tej własności, że jedynie jego końce mogą być punktami skupienia dopełnienia $X \setminus L$

charakteryzuje te zwarte przestrzenie metryczne, które zanurzają się w prostą euklidesową. Rezultat ten istotnie wzmacnia imponujące twierdzenie Kleina i Moore'a z 1919 roku, które głosi, że warunek $(\star)$ charakteryzuje zwarte podzbiory płaszczyzny leżące na łuku prostym. Twierdzenie 1.7 z pracy doktorskiej jest dowiedzione przy wykorzystaniu granic ciągów odwrotnych, a

więc zupełnie inną metodą niż w artukule [1], co bez wątpienia jest dodatkowym osiągnięciem Doktoranta. Przy okazji mgr Kula sformułował przejrzysty Lemat 1.4, wcześniej nieznanym, podający mało wymagający i prosty warunek na to, by topologia granicy X_∞ ciągu odwrotnego przestrzeni liniowo uporządkowanych dziedziczona z produktu pokrywała się z topologią liniowego porządku na X_∞ . Tym warunkiem jest, by odwzorowania $f_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ były ciągłymi niemalejącymi suriekcjami, co powoduje naturalne zdefiniowanie liniowego porządku na X_∞ poprzez $(x_n) <_\infty (y_n) \stackrel{\text{df}}{\Leftrightarrow} \exists n \quad x_n < y_n$.

Druga część Rozdziału 1 omawia rodzaje zbiorów ważne w teorii arytmetyki zbiorów Cantora, w teorii zbiorów P -sum i teorii zbiorów osiągalnych. Są to różnego rodzaju kantorwały, pojawiające się w pełnej charakteryzacji topologicznych typów algebraicznych sum dwóch jednorodnych zbiorów Cantora (wyniki Mendesa i Oliveiry z 1994 roku). Tylko M -kantorwały pojawiły się sześć lat wcześniej jako jeden z typów topologicznych zbioru podsum bezwzględnie zbieżnego szeregu rzeczywistego (wyniki Guthrie'go i Nymanna z 1988 roku). Natomiast L -kantorwał to zwarty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ taki, że skończone prawe końce wszystkich A -luk są lewymi końcami A -przedziałów i jednocześnie skończone lewe końce wszystkich A luk są granicami ciągów A -przedziałów. Omawiany Rozdział 1 zawiera charakteryzację zwartych przestrzeni metrycznych homeomorficznych z L -kantorwałami (Tw. 1.10). To wartościowy wynik.

Ostatnim rezultatem, który tu wspomnę spośród wyników zawartych w Rozdziale 1, jest wykazanie istnienia continuum wielu niehomeomorficznych L kantorwałów (Tw. 1.17), co rażąco kontrastuje z M -kantorwałami, które wszystkie są wzajemnie homeomorficzne. Nota bene, ta ostatnia obserwacja, choć znana już wcześniej, pojawia się z nowym dowodem w prezentowanej pracy doktorskiej jako Wniosek 1.13.

Rozdział 2: Zbiory podsum

Ten rozdział jest oparty na pracy [4] i przedstawia nowatorskie podejście od badania sum ważonych zbieżnego szeregu geometrycznego (przez wszystkich zwanych P -sumami).

Jeśli (x_n) jest, zazwyczaj zbieżnym do zera, ciągiem liczb rzeczywistych, a Σ jest skończonym zbiorem liczb rzeczywistych (z dopuszczeniem powtórzeń), to zbiór

$$S(\Sigma, (x_n)) := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i x_i : (\sigma_i) \in \Sigma^{\mathbb{N}} \right\}$$

nazywamy zbiorem sum ciągu (x_n) ważonych wagami z Σ . Niestety, ta nazwa doszczętnie przegrała z historycznie ustalonym terminem *zbiór P -sum*, który jest używany także w przedstawionej rozprawie (patrz str. 54). Zbiór

osiągalny ciągu (x_n) jest dokładnie zbiorem sum ważonych z wagami z $\{0, 1\}$, to jest, $A(x_n) = S(\{0, 1\}, (x_n))$. W przypadku, gdy (x_n) jest zbieżnym ciągiem geometrycznym o ilorazie $q > 0$, jego zbiór sum ważonych wagami Σ jest oznaczany symbolem $E(\Sigma, q)$ tak, jak to czyni Doktorant w swojej rozprawie. Własności takich zbiorów były tematem pracy Banakha, Bartoszewicza, Filipczak i Szymonik z 2015 roku, przełomowej dla badania zbiorów osiągalnych, gdyż jeśli Σ jest zbiorem podsum zbioru skończonego $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ liczb dodatnich, to $E(\Sigma, q) = A(p_1, p_2, \dots, p_n; q)$, gdzie $\Sigma(p_1, p_2, \dots, p_n; q)$ jest szeregiem multigeometrycznym. Fundamentalne twierdzenia z pracy Banakha, Bartoszewicza, Filipczak i Szymonik pozwalają więc, w wielu przypadkach, rozstrzygać o naturze topologicznej zbiorów osiągalnych szeregów multigeometrycznych i te twierdzenia pozostają głównym narzędziem do tego służącym poza mało czułymi warunkami Kakeyi i poza trudnymi w zastosowaniach wyrafinowanymi kryteriami Nowakowskiego.

Na tym tle Wniosek 2.25 z ocenianej rozprawy postrzegam jako bardzo istotny krok naprzód w trudnym zagadnieniu rozpoznawania, czy dany zbiór osiągalny jest zbiorem Cantora czy kantorwałem. Oczywiście, Wniosek 2.25 jest tylko wnioskiem z głównego twierdzenia tego rozdziału, którym jest Tw. 2.21, podające siedem warunków równoważnych na to, by $E(\Sigma, q)$ zawierał przedział w sytuacji, gdy q jest odwrotnością ilości wag Σ . To piękne i mocne twierdzenie zostało udowodnione w wielu starannie przedstawionych krokach, posilkując się pojęciami z teorii ergodycznej i teorii kafelkowania. Jest to pierwsze użycie tego typu narzędzi do badania najtrudniejszego zagadnienia teorii zbiorów osiągalnych i bez wątpienia zasługuje na zdecydowanie wyróżnienie, gdyż otwiera nowe możliwości w szukaniu sposobów przesądzania o typie topologicznym zbiorów osiągalnych.

Kolejnym zaskoczeniem dla mnie było użycie ważnego pojęcia algebry – wielomianów cyklotomicznych – przy wyprowadzaniu wspomnianego Wniosku 2.25 z głównego twierdzenia. Bogactwo narzędzi matematycznych użytych w rozumowaniach Rozdziału 2 jest godne wyjątkowego uznania i pokazuje, jak istotnie Doktorant rozwinął swoją znajomość matematyki w okresie pracy nad przygotowaniem doktoratu.

Rozdział 3: Zbiory podsum na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$

Centralnym wynikiem tego rozdziału, opartego na części pracy [2], jest Tw. 3.2, mówiące o tym, że każdy zbiór P -sum (z $0 \in P$ i generowany przez dowolny szereg bezwzględnie zbieżny) jest śladem zbioru podsum $A(x_n, y_n)$ na osi OX dla odpowiednio dobranego bezwzględnie zbieżnego szeregu $\Sigma(x_n, y_n)$.

Unikanie przez wielu matematyków, łącznie ze mną, tematyki zbiorów osiągalnych na płaszczyźnie bierze się przede wszystkim z braku znajomości wszystkich możliwych typów topologicznych takich zbiorów, gdyż na płaszczyźnie nie mamy analogonu twierdzenia klasyfikacyjnego Guthriego-Nymanna i w konsekwencji nie można prowadzić kluczowych rozumowań, które w przypadku jednowymiarowym opierają się na tym właśnie twierdzeniu. Dlatego naturalnym krokiem jest szukanie takich typów topologicznych. Łatwa obserwacja, że jeśli $A(x_n)$ i $A(y_n)$ są zbiorami osiągalnymi na prostej, to $A(x_n) \times A(y_n)$ jest zbiorem osiągalnym na płaszczyźnie (Fakt 3.1 z rozprawy), pozwala natychmiast zidentyfikować dziewięć niehomeomorficznych typów zbiorów osiągalnych na płaszczyźnie w oparciu o dobrze znaną typologię na prostej rzeczywistej. Wartością Tw. 3.2 jest to, że pozwala ono (a dokładniej jego dowód) na wykazanie istnienia dziesiątego typu zbioru osiągalnego w $\mathbb{R}^2$ różnego od wszystkich elementarnych typów wymienionych w Fakcie 3.1.

Oczywiście nie zamyka to kwestii ilości typów zbiorów osiągalnych na płaszczyźnie i mam nadzieję, że Doktorant powróci w przyszłości do tego dziś bardzo trudnego zagadnienia. W trakcie czytania tego rozdziału przyszło mi do głowy pytanie o to, czy każde cięcie zbioru osiągalnego $A(x_n, y_n)$ równoległe do którejkolwiek osi, musi być zbiorem P -sum. Później spostrzegłem, że moje pytanie jest równoważne pytaniem *Question 6.1* z pracy [2].

Rozdział 4: Centrum dystansów

W rozdziale tym opartym na samodzielnej pracy [3] Doktorant argumentuje pozytywną odpowiedź na ubiegłoroczne pytanie pani profesor Filipczak o to, czy każdy zawierający zero podzbiór półprostej nieujemnej jest centrum dystansów pewnego podzbioru $\mathbb{R}$. W dowodzie głównego Twierdzenia 4.2 Doktorant konstruuje poprzez indukcję pozaskończoną zbiór o z góry zadany centrum dystansów, a później wzmacnia swoją obserwację przez wykazanie, że ów poszukiwany zbiór zawsze można wybrać spośród zbiorów Bernsteina (Tw. 4.4). To uzupełnienie jest wartościowe i interesujące, aczkolwiek z pewnego punktu widzenia idzie w złym kierunku, gdyż zbiory Bernsteina są bardzo osobliwe (np. nie są mierzalne). Otóż już w czasach Pierwszych

Warsztatów z Ponowoczesnej Analizy Rzeczywistej pięć lat temu bezskutecznie zmagaliśmy się z podobnym pytaniem, czy każdy zwarty i zawierający zero podzbiór półprostej nieujemnej jest centrum dystansów pewnego zwartego podzbioru $\mathbb{R}$. Przez kilka kolejnych lat nie znaleźliśmy odpowiedzi na to pytanie, a zapisem naszej częściowej odpowiedzi jest ostatnie twierdzenie w pracy Bartoszewicza, Filipczak, Horbaczewskiej, Lindnera i niżej podpisanego *On the operator of center of distances between the spaces of closed subsets of the real line* z roku 2024, które mówi, że każdy zwarty i zawierający 0 podzbiór $[0, +\infty)$ jest centrum dystansów pewnego domkniętego podzbioru tej półprostej. Nasza konstrukcja nie pozwoliła na zapewnienie ograniczonności docelowego zbioru. Może użycie podejścia zaproponowanego przez Doktoranta w dowodzie Twierdzeń 4.2 i 4.4 umożliwi odpowiedź na wspomniane pytanie z 2020 roku?

Na tym skończyłem przedstawienie mojego punktu widzenia na poszczególne rozdziały ocenianej rozprawy. Teraz przejdę do oceny generalnej.

Cała rozprawa jest bardzo zwarta i osnuta wokół najróżniejszych aspektów nowej tematyki badawczej w analizie rzeczywistej, jaką jest teoria zbiorów osiągalnych, która zapuściła korzenie w kilku polskich ośrodkach matematycznych niecałe piętnaście lat temu i od tego czasu owocnie się rozwija. Do przełomowych prac w tej dziedzinie na pewno zalicza się artykuł Bielasa, Plewika i Walczyńskiej *On the center of distances* z 2018 roku i stąd ta tematyka, poprzez obu Promotorów, znalazła się w kręgu badań Doktoranta. Kluczowe dla klasyfikacji Guthrie-Nymanna pojęcie kantorwału, pojawiło się w dojrzałej formie w pracy Mendesa i Oliveiry razem z innymi rodzajami specjalnych zbiorów zwartych na prostej, m.in. L -kantorwałami i R -kantorwałami, których wybrane własności są częścią osiągnięć Rozdziału 1. Rozdział 2, choć na szerszym poziomie zbiorów P -sum ciągów geometrycznych, daje Wniosek 2.25, który rozstrzyga o typie topologicznym zbiorów osiągalnych dla niektórych ważnych ciągów multigeometrycznych. To zagadnienie nie dawało się rozstrzygnąć metodami klasycznymi, nawet uwzględniając mocne wyniki Banakha, Bartoszewicza, Filipczak i Szymonik z 2015 roku. Rozdział 3 stawia czoła niesklasyfikowanym topologicznie zbiorom osiągalnym na płaszczyźnie, efektownie i nietrywialnie dowodząc istnienia dziesiątego typu poza podstawowymi dziewięcioma. Wreszcie Rozdział 4, choć nie dotyczy bezpośrednio zbiorów osiągalnych, podaje rozwiązanie zagadnienia suriektywności operatora centrum dystansów, któremu wcześniej bezskutecznie próbowaliśmy stawiać czoła w kolejnych latach współpracy w ramach Warsztatów z Ponowoczesnej Analizy Rzeczywistej, czy to w wersji zwartej z 2020 roku, czy w wersji ogólnej upublicznionej przez panią profesor Filipczak w zeszłym roku. Pojęcie centrum dystansów zostało wprowadzone we wspomnianej już

pracy Bielasa, Plewika i Walczyńskiej z 2018 roku jako narzędzie do rozpoznawania nieosiągalności zbiorów, więc i Rozdział 4 jest wyraźnie powiązany z tematyką zbiorów osiągalnych i stanowi powrót do niebanalnych osiągnięć Promotorów w zakresie tej tematyki.

W moich oczach cała działalność badawcza Doktoranta jest spójnie skoncentrowana wokół teorii zbiorów osiągalnych i choć zajmuje się wieloma aspektami tej tematyki, czyni to bardzo zróżnicowanymi narzędziami, w tym nowatorskimi zastosowaniami innych klasycznych i ważnych teorii, jak przedstawiłem to w mojej ocenie Rozdziału 2. Nie mogę pominąć faktu, że w dorobku magistra Mateusza Kuli jest już jedna samodzielna publikacja, co ostatnio – w doktoratach, w których nadawaniu uczestniczyłem – widziałem siedem lat temu. Na wyrazne podkreślenie zasługują też uczciwość i skromność Doktoranta, który, będąc współautorem publikacji [2], zaprezentował w rozprawie tylko tę część artykułu, w której powstaniu uczestniczył w pełni, i pominął obszerną resztę, w tym wyjątkowo obiecujące pojęcie spektrum zbioru i związane z nim ciekawe wyniki.

Praca jest napisana nieprzeciętnie starannie i z wielką erudycją matematyczną. Wszystkie potrzebne pojęcia są dokładnie opisane, a dowody są poprawne i dostatecznie szczegółowe. Jediną konieczną drobnostką korektą, której potrzebę dostrzegłem, jest zamiana przysłowka *negatywnie* na *pozytywnie* w szóstym od góry wierszu na stronie 54.

W konkluzji stwierdzam, że oceniana rozprawa doktorska magistra Mateusza Kuli zawiera znaczące wyniki matematyczne z zakresu analizy rzeczywistej, stanowiące oryginalne rozwiązania kilku ciekawych problemów matematycznych. Zgłębianie świata zbiorów osiągalnych jest atrakcyjnym programem, wymagającym biegłości w posługiwaniu się klasycznymi narzędziami analizy rzeczywistej i domagającym się znajdowania nowych narzędzi dla rozwiązania wielu problemów otwartych w tej tematyce. Przedstawiona rozprawa stanowi niezbitą dowód, że Doktorant opanował obie te umiejętności na ponadprzeciętnie wysokim poziomie. W mojej ocenie rozprawa doktorska magistra Mateusza Kuli nie tylko spełnia wszelkie ustawowe i zwyczajowe wymogi dotyczące oryginalności i zakresu prowadzonych badań, ale na tyle je przekracza, że wnioskuję o uznanie tej rozprawy za wyróżnioną, co bez wątplenia mocno uzasadniłem szczegółowymi opiniami w zasadniczej części niniejszej recenzji. Wnoszę o przyznanie panu magistrowi Mateuszowi Kuli stopnia doktora nauk matematycznych.