

prof. dr hab. Władysław Kulpa
profesor emerytowany UKSW

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgra Mateusza Kuli
Zbiory podsum szeregów liczbowych zbieżnych

Promotorem rozprawy jest Profesor Szymon Plewik, a promotorem pomocniczym jest Doktor Wojciech Bielas. Rozprawa składa się z czterech rozdziałów. Część wyników rozprawy jest już opublikowana w trzech artykułach o zasięgu międzynarodowym. Przy pisaniu recenzji zapoznałem się też z omówieniami wyników Autora przez recenzentów *Mathematical Reviews* a także z recenzją wewnętrzną przy przyjmowaniu jednego z artykułów do druku.

Przystępuję do szczegółowego omówienia wyników zamieszczonych w rozprawie. Pierwsze trzy rozdziały rozprawy są poświęcone badaniu podsum szeregów liczbowych. Jeśli w przestrzeni Banacha dany jest szereg $\sum_n x_n$, który jest bezwarunkowo zbieżny, to wtedy możemy mówić o zbiorze

$$A(x_n) := \left\{ \sum_{n \in B} x_n : B \subseteq N \right\}.$$

Zbiory te nazywamy *zbiorami podsum szeregu* $\sum_n x_n$. Jak łatwo zauważyć taki zbiór $A(x_n)$ jest obrazem ciągłym zbioru Cantora. Za prekursora badań nad zbiorami podsum szeregów uważa się Soichi Takeya, który w 1914 roku opublikował artykuł *On the set of partial sums of an infinite series*, gdzie pokazał, że takie zbiory są doskonałe. Przez wiele lat pojęcie zbioru podsum szeregu nie budziło zainteresowania matematyków. Zbiory podsum szeregów zaczęły pojawiać się pod koniec XX wieku w związku z badaniami przez Mendesa i Oliveirę topologicznej struktury arytmetycznej sumy dwu zbiorów Cantora. Wtedy oprócz zbioru Cantora zaczęły powstawać takie pojęcia jak L-Cantorval, R-Cantorval i M-Cantorval do badania, których potrzebna była znajomość faktów z teorii liniowych porządków. Tematyka zbiorów Cantora i przestrzeni liniowo uporządkowanych była podejmowana przez Profesora Jerzego Mioduszewskiego z chwilą pojawienia się go w Katowicach w 1966 roku. W roku akademickim 1966/67 zaczął prowadzić seminarium dla studentów czwartego roku Filii Uniwersytetu Jagiellońskiego (przekształconej

w 1968 roku wraz z Wyższą Szkołą Pedagogiczną w Uniwersytecie Śląski). Do dnia dzisiejszego 97-letni Profesor interesuje się działalnością naukową grupy topologów z Instytutu Matematyki, do której należy najmłodszy, Mateusz Kula.

Niewątpliwie, w Katowicach badania nad zbiorami sum szeregów zainicjował Profesor Szymon Plewik. W wyniku współpracy powstała publikacja napisana w Katowicach

W. Bielas, M. Kula, Sz. Plewik, *On compact subsets of the reals*. Topology Appl. 346, Paper No. 108854 (2024). 10s.

Wyniki zawarte w tej pracy są omawiane w pierwszym rozdziale. Rozdział ten nie jest prostym przetłumaczeniem wspomnianego już artykułu trzech autorów. Autor rozprawy wprowadza nowe zmiany w dowodach, często stosuje metodę dowodzenia twierdzeń techniką granic odwrotnych, dodaje nowe fakty.

Zbiór podsum szeregu liczbowego bezwzględnie zbieżnego ma jedną z czterech postaci: zbiór skończony, skończona suma przedziałów domkniętych, zbiór Cantora lub M-Cantorval. Ten wynik to twierdzenie Guthriego-Nymanna opublikowane w 1988 roku w *Colloquium Mathematicum*. Do tego twierdzenia Mateusz Kula powraca też w rozdziale trzecim.

Cantorvale to podzbiory zwarte prostej, to z grubsza mówiąc, zbiory Cantora z doklejonymi do nich w różny sposób odcinkami. Okazuje się, że suma algebraiczna dwóch jednorodnych zbiorów Cantora ma jedną z pięciu postaci: przedział domknięty, zbiór Cantora, L-Cantorval, R-Cantorval lub M-Cantorval. Pojęcia L-Cantorvalu i R-Cantorvalu są symetryczne, a zależą od doklejania odcinków z lewej lub prawej strony i dlatego wystarczy dowodzić twierdzeń dla L-Cantorwali. Twierdzenia dla R-Cantorwali są analogiczne. W rozprawie pokazano w oparciu o twierdzenie Mazurkiewicza-Sierpińskiego, że istnieje continuum niehomeomorficznych L-Cantorwali. W rozprawie jest podana definicja specjalnych L-Cantorwali i udowodniono, że każde takie dwa specjalne L-Cantorvale są homeomorficzne. Jest też pokazane, że dowolne dwa M-Cantorvale są homeomorficzne. Dowody wymagają charakteryzacji zwartych przestrzeni metrycznych, które są zanurzalne w prostą rzeczywistość.

Rozdział drugi jest wynikiem współpracy naukowej z Szymonem Głębem. W czasie zajęć Szkoły Doktorskiej obaj Panowie Mateusz Kula i Szymon Głęb, natrafili na interesujący artykuł:

R. Kenyon, *Projecting the one-dimensional Sierpiński gasket*, Israel J. Math. 97 (1997), s. 221-238,

który zainspirował ich do badania podsum szeregów multigeometrycznego. W tym rozdziale można znaleźć uogólnienia rezultatów z pracy Kenyona. Głównym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie, które zawiera siedem warunków równoważnych dotyczących podsum szeregu multigeometrycznego. Jak zapowiada Autor rozprawy zawartość tego rozdziału chce opublikować wspólnie z Szymonem Głębem.

Rozdział trzeci jest związany z badaniem zbiorów podsum szeregów na płaszczyźnie. Ta część rozprawy jest napisana na podstawie wspólnej publikacji Autora z jego rówieśnikiem z Uniwersytetu Łódzkiego Piotrem Nowakowskim.

M. Kula, P. Nowakowski, *Achievement sets of series in R^2* , Results Math. 79 no. 6. Paper No. 221 (2024), 24s.

Głównym celem tego rozdziału jest próba znalezienia charakterystyki podobnej do wspomnianego już twierdzenia Guthriego-Nymanna. Zadanie wydaje mi się trudne. Na płaszczyźnie zbiory Cantora zachowują się całkiem inaczej niż na prostej. Na przykład, każdy homeomorfizm pomiędzy dwoma zbiorami Cantora położonymi na płaszczyźnie można przedłużyć do homeomorfizmu płaszczyzny. Takie twierdzenie nie jest prawdziwe gdy płaszczyznę zastąpimy prostą rzeczywistą. Dlatego nie udało się znaleźć analogonu twierdzenia Guthriego-Nymanna. Rozdział rozpoczyna się od następującej obserwacji:

Niech I będzie przedziałem domkniętym, C - zbiorem Cantora, a M niech będzie M -Cantorvalem. Każdy ze zbiorów $\{0\}, I, C, M, I \times I, I \times C, I \times M, C \times M, M \times M$ jest homeomorficzny ze zbiorem $A(x_n, y_n)$ dla pewnego szeregu bezwzględnie zbieżnego $\sum_n(x_n, y_n)$ na płaszczyźnie.

Autor rozprawy przedstawia twierdzenie wraz z dowodem ze wspólnej pracy z Piotrem Nowakowskim, które umożliwia udowodnienie, że istnieje zbiór podsum $A(x_n, y_n)$ na płaszczyźnie, który nie jest żadnego typu spośród wymienionych we wspomnianej obserwacji.

Rozdział czwarty przedstawia wynik Autora zawarty w artykule:

M. Kula, *Center of distances and Bernstein sets*, Real Anal. Exchange, Advance Publication 1 - 6 (2025).

Autor odpowiada na pytanie Małgorzaty Filipczak postawione dwukrotnie na konferencjach *Inspirations in Real Analysis II (2024)*, *46th Summer Symposium in Real Analysis (2024)*

Czy każdy zbiór $A \subset [0, \infty)$ zawierający 0 jest centrum dystansów pewnego zbioru $X \subseteq R$?

Pojęcie zbioru dystansów zostało wprowadzone w artykule:

W. Bielas, Sz. Plewik, M. Walczyńska, *On the center of distances*, Eur. J. Math. 4 no. 2 (2018), s.687-608

dla przestrzeni metrycznej (X, d) jako zbiór

$$S(X) := \{a \in [0, \infty) : \forall_{x \in X} \exists_{y \in X} d(x, y) = a\}.$$

Pojęcie to okazało się bardzo dobrym narzędziem w dowodach o niemożliwości przedstawienia danego zbioru jako zbioru podsum szeregu. W opublikowanej pracy Mateusz Kula odpowiedział pozytywnie na pytanie Małgorzaty Filipczak i jeszcze dodatkowo pokazał, że taki zbiór może być zbiorem Bernsteina. W wewnętrznej recenzji dla *Real Anal. Exchange* Recenzent napisał:

In conclusion, the results presented in this paper are of significant interest to me and to others working in the field of achievement sets. I believe the findings will appeal to a broad audience.

Redakcja po zapoznaniu się z recenzją uznała, że pracę można drukować bez poprawek językowych.

Artykuł omawiany w czwartym rozdziale świadczy, że Mateusz Kula jest dojrzałym i utalentowanym badaczem naukowym i zasługuje na doktorat z wyróżnieniem.

Konkluzja. Autor rozprawy posiada umiejętność nawiązywania licznych kontaktów naukowych, a następnie podjęcia owocnej współpracy. Rozprawa doktorska mgra Mateusza Kuli spełnia z nawiązką wymagania zwyczajowe jakie są stawiane pracom doktorskim przez ustawę z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. 2021 poz. 478 z późn. zm.). Po zapoznaniu się z rozprawą i opiniami recenzentów jego publikacji w czasopismach stwierdzam, że autor w wysokim stopniu opanował wiedzę teoretyczną i metody niezbędne do samodzielnego prowadzenia badań naukowych. Wnoszę o dopuszczenie Pana mgra Mateusza Kuli do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.

Warszawa, 28 lipca 2025 r.

