

dr hab. Małgorzata Filipczak  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytetu Łódzkiego  
ul. Banacha 22, 90-238 Łódź

## **Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Mateusza Kuli „Zbiory podsum szeregów liczbowych zbieżnych”**

Rozprawa doktorska Pana magistra Mateusza Kuli została przygotowana w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego pod opieką prof. dra hab. Szymona Plewika (promotor) oraz dra Wojciecha Bielasa (promotor pomocniczy). Poświęcona jest różnorodnym własnościom pewnych zbiorów zwartych definiowanych poprzez szeregi zbieżne. Rozprawa liczy 66 stron maszynopisu i składa się ze streszczeń w języku polskim i angielskim, czterech rozdziałów i bibliografii zawierającej 45 pozycji.

W rozdziale pierwszym omówione są rezultaty pochodzące z pracy W. Bielas, M. Kula, Sz. Plewik, *On compact subsets of the reals*, Topology Appl. 346, Paper No 108854 (2024). Głównym obiektem rozważań jest warunek

(\*) dowolna nietrywialna składowa  $L$  przestrzeni  $X$  jest łukiem o tej własności, że jedynie jego końce mogą być punktami skupienia zbioru  $XL$ .

Twierdzenie 1.7 głosi, że dla dowolnej zwartej przestrzeni metrycznej  $X$  warunek (\*) implikuje fakt, że przestrzeń  $X$  jest homeomorficzna z podzbiorem prostej. Wynik ten jest istotnym wzmocnieniem klasycznego wyniku Kleina i Moore'a, którzy rozważali analogiczny warunek dla zwartych podzbiorów płaszczyzny. Godny podkreślenia jest fakt, że Autor rozprawy zaproponował istotną modyfikację dowodu wykorzystując interesujące pojęcie granicy ciągu odwrotnego.

W drugiej części rozdziału rozważane są specyficzne zwarte podzbiory prostej, powstające jako algebraiczne sumy zbiorów Cantora nazywane w pracy M-Cantorwałami, L-Cantorwałami oraz R-Cantorwałami. Najdokładniej charakteryzowane są L-Cantorvale, czyli takie niepuste zwarte

podzbiory prostej, dla których każdy prawy koniec luki jest jednocześnie końcem zawartego w tym zbiorze przedziału oraz każdy lewy koniec luki leży w składowej trywialnej tego zbioru. W Twierdzeniu 1.17 pokazano, wykorzystując twierdzenie Mazurkiewicza-Sierpińskiego z 1920 roku, że istnieje continuum niehomeomorficznych L-Cantorwali. Wynik ten jest tym ciekawszy, że wszystkie M-Cantorvale są homeomorficzne (nowy, oryginalny dowód tego faktu zawarty jest we Wniosku 1.13). Ponadto, interesujące Twierdzenie 1.10 o niebanalnym dowodzie, wykorzystuje warunek (\*) i granicę ciągu odwrotnego do charakteryzacji zwartych przestrzeni metrycznych homeomorficznych z L-Cantorwalami.

Rozdział 2 poświęcony jest zbiorom podsum szeregów, zwanych także zbiorami osiągalnymi. Wyniki pochodzą z pracy Sz. Głęb, M. Kula, *Kenyon theorem revisited* dostępnej na platformie ArXiv. Wiadomo (ze słynnego wyniku Guthrie'a i Nymanna z 1988 roku), że zbiór  $A(x_n)$  podsum bezwzględnie zbieżnego szeregu  $\sum x_n$  jest zbiorem skończonym, skończoną sumą przedziałów domkniętych, zbiorem Cantora lub M-Cantorvalem. Znając szybkość zbieżności szeregu  $\sum x_n$ , dzięki klasycznym nierównościom Kakeyi, mamy pełną informację kiedy  $A(x_n)$  jest skończoną sumą przedziałów oraz częściową informację (znane jest tylko wynikanie) dotyczącą zbiorów Cantora. Od ponad czterdziestu lat trwają próby znalezienia warunku na to aby  $A(x_n)$  był M-Cantorvalem, a dokładniej rozstrzygnięcie czy dany zbiór osiągalny jest zbiorem Cantora czy też M-Cantorvalem. Autorzy artykułu mierzą się z tym problemem wykorzystując pojęcie zbiorów samopodobnych, czyli zbiorów postaci  $E(\Sigma, q) := \left\{ \sum \sigma_i q^i : (\sigma_i) \in \Sigma^{\mathbb{N}} \right\}$  gdzie  $\Sigma$  jest pewnym zbiorem skończonym zaś  $q \in (0,1)$ . Zbiory samopodobne stanowią uogólnienie zbiorów podsum ciągów multigeometrycznych, często wykorzystywanych przy próbach odpowiedzi na wcześniej sformułowane pytanie.

Autor rozprawy, po przytoczeniu podstawowych definicji i własności, prezentuje ciąg niebanalnych lematów prowadzących do głównego w tym rozdziale Twierdzenia 2.21. Twierdzenie to zawiera siedem warunków równoważnych faktowi, że zbiór  $E(\Sigma, q)$  zawiera przedział (przy założeniu, że  $q$  jest odwrotnością mocy zbioru  $\Sigma$ ). Warunki prezentują różnorodnie i niekiedy zaskakujące dla mnie punkty widzenia oraz bogactwo narzędzi, wykorzystując między innymi pojęcie kafelkowania, miary probabilistyczne, ich sploty a także teorię ergodyczną. Bardzo ważne wydają mi się także wnioski z tego twierdzenia, ze szczególnym uwzględnieniem Wniosku 2.25.

Rozdział trzeci przedstawia część wyników z pracy M. Kula, P. Nowakowski, *Achievement sets of series in  $R^2$* , Results Math. 79 no. 6, Paper No. 221 (2024) dotyczących różnych typów topologicznych zbiorów osiągalnych na płaszczyźnie. Wiadomo, że jeśli  $A$  i  $B$  są zbiorami osiągalnymi na prostej, to  $A \times B$  jest zbiorem osiągalnym na płaszczyźnie. Wiadomo też, że istnieją także zbiory podsum niehomeomorficzne z żadnym ze zbiorów takiej postaci. Magister Kula pyta czy istnieje zbiór osiągalny na płaszczyźnie, który nie jest homeomorficzny z żadnym zbiorem stanowiącym skończoną sumę zbiorów homeomorficznych z  $A \times B$ . Pozytywną odpowiedź na to

pytanie daje konstrukcja przedstawiona we Wniosku 3.3 wykorzystująca interesującą samą w sobie konstrukcję zawartą w dowodzie Twierdzenia 3.2. Godny zauważenia jest fakt, że Autor rozprawy pominął znaczną część wyników cytowanej pracy, deklarując że należą one do współautora.

Bardzo krótki rozdział czwarty oparty jest na samodzielnej pracy pana Mateusza Kuli opublikowanej w numerze 50 czasopisma Real Analysis Exchange i dotyczy pojęcia centrum dystansów. Mam do tej części rozprawy wyjątkowy stosunek, ponieważ zawiera cenną i niełatwą konstrukcję rozwiązującą problem z którym przez długi czas się zmagalam, a także stawiałam jako pytanie na dwóch międzynarodowych konferencjach. Przypomnę, że centrum dystansów przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  nazywamy zbiór  $S(X) := \{a \in [0, \infty) : \forall_{x \in X} \exists_{y \in X} d(x, y) = a\}$ . Magister Kula w Twierdzeniu 4.2 dowodzi, że dla dowolnego zbioru  $A \subset [0, \infty)$  o tej własności, że  $0 \in A$  istnieje zbiór  $X \subset \mathbb{R}$  taki, że  $S(X) = A$ . Pokazuje także (Twierdzenie 4.4), że zbiór  $X$  można wybrać tak aby był on zbiorem Bernsteina.

Wyniki zawarte w rozprawie oceniam bardzo wysoko. W mojej opinii rozszerzają one istotnie wiedzę dotyczącą zbiorów osiągalnych i centrów dystansów. Trzymając się ściśle zapowiedzianego tematu, Autor wykazał się znajomością wielu zagadnień związanych z różnymi działami matematyki. Z zainteresowaniem zapoznałam się z własnościami granic odwrotnych, kafelkowania oraz wielomianów cyklotomicznych. Podoba mi się staranne oddzielanie własnych dowodów od wyników znanych wcześniej. Nawet jeśli praca zawiera oryginalny dowód Autora to - jeśli wynik jest znany - zostało to wyraźnie zaznaczone w tekście. Warto zaznaczyć, że te nowe, autorskie dowody bywają bardzo ciekawe. Przykładem jest tu dowód faktu, że wszystkie M-Cantorvale są homeomorficzne, wykorzystujący własności przeliczalnych przestrzeni liniowo uporządkowanych. Uważam też za bardzo interesujący pomysł zaprezentowania nowych dowodów, opartych o metodę granic odwrotnych. Doceniam także bogactwo narzędzi pozwalających na sformułowanie aż siedmiu różnorodnych równoważnych warunków w Twierdzeniu 2.21.

Magister Kula uzyskał swoje wyniki we współpracy z czterema matematykami. Poza promotorem i promotorem pomocniczym z (macierzystego dla doktoranta) Uniwersytetu Śląskiego znajdują się wśród nich naukowcy z Politechniki Łódzkiej oraz Uniwersytetu Łódzkiego. Dowodzi to w moim pojęciu szerokich zainteresowań i znacznej dojrzałości Autora rozprawy. Godny szacunku i rzadko spotykany wydaje mi się fakt, że pan Kula pominął w swojej rozprawie znaczną część wyników uzyskanej w pracy wspólnej z dr. Piotrem Nowakowskim.

Praca została napisana ładnym językiem, dowody są czytelne i klarowne, chociaż niekiedy przedstawione dość skrótowo. Zapewne ilość użytych pojęć spowodowała, że pominięto kilka przydatnych definicji (na przykład definicje jednorodnego zbioru Cantora i przedziału maksymalnego w L-Cantorvalu oraz przestrzeni rozproszonych). Trochę mnie też zdziwiło, że w dowodzie Faktu 2.5 (nierówności Kakeyi) pominięto akurat część (iii), zastępując dowód odwołaniem do pracy dostępnej tylko jako preprint na arXiv.

Rozprawa jest bardzo starannie zredagowana. Zauważyłam tylko cztery drobne błędy edytorskie:

- na stronie 40. w sformułowaniu warunku (VI) brakuje słowa "na";
- na stronie 49. (w 4. wierszu) niepotrzebnie dwukrotnie pojawia się symbol  $\Sigma$ ;
- na stronie 53. w trzecim wierszu zamiast "przed" powinno być "przez", a w wierszu 13. zamiast  $A(x_n)$  powinno być  $\{(x, x) : x \in A(x_n)\}$ ;
- na stronie 56. (wiersz 6.) powinno być "pozytywnie" zamiast "negatywnie".

Biorąc pod uwagę długość rozprawy i bogactwo zawartych w niej wyników świadczy to o ponadprzeciętnej staranności Autora.

Reasumując, stwierdzam że rozprawa doktorska magistra Mateusza Kuli zawiera znaczące wyniki z zakresu szeroko rozumianej analizy rzeczywistej. **Moim zdaniem opiniowana rozprawa spełnia z naddatkiem wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim, wnioskuję więc o uznanie jej za wyróżnioną i dopuszczenie autora, magistra Mateusza Kuli, do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**