

Procesy stochastyczne w modelowaniu ekosystemów

Streszczenie

Niniejszą rozprawę doktorską stanowi poniższy cykl czterech publikacji poświęconych zastosowaniu *kawałkami deterministycznych procesów Markowa* (PDMPs) w modelowaniu dynamiki liczebności populacji:

- [I] P. Klimasara. Revisiting the logistic growth with random disturbances. *Math. Appl. (Warsaw)*, 47(2):177–186, 2019.
- [II] P. Klimasara and M. Tyran-Kamińska. A model for random fire induced tree-grass coexistence in savannas. *Math. Appl. (Warsaw)*, 46(1):87–96, 2018.
- [III] P. Klimasara and M. Tyran-Kamińska. A model of seasonal savanna dynamics. *SIAM J. Appl. Math.*, 83(1):122–143, 2023.
- [IV] P. Klimasara, M. C. Mackey, A. Tomski, and M. Tyran-Kamińska. *Randomly switching evolution equations. Nonlinear Anal. Hybrid Syst.*, 39:Paper No. 100948, 15, 2021.

Zasadniczym problemem badawczym, łączącym tematycznie artykuły składające się na tę rozprawę, jest analiza wpływu różnego typu zaburzeń na modele dynamiki populacyjnej oparte o PDMPs oraz rozwój metod matematycznych badania takich modeli.

Po opisowym nakreśleniu rozważanych zagadnień we wstępie i zwięzłym przedstawieniu najważniejszych pojęć, merytoryczna część rozprawy została podzielona na trzy części.

W pierwszej z nich prezentujemy dwa modele populacyjne antagonistycznych grup roślin – traw i drzew – na sawannie. Przypuszcza się, że brak przejścia do innego biomu, w którym dominuje jedna z nich, spowodowany jest częstym występowaniem zaburzeń środowiskowych powodujących straty w biomasy obu typów roślinności. Wśród najważniejszych tego typu czynników wymienia się pożary. Większość istniejących modeli matematycznych nie uwzględnia bezpośrednio losowej natury pożarów, zakładając ich okresową powtarzalność lub wprowadzając do równań wyrazy odpowiadające ciągłym stratom (opis deterministyczny). Ponadto najczęściej nie są dla nich dowodzone wyniki analityczne – badacze ograniczają się do przeprowadzenia symulacji numerycznych i analizy odpowiednich bifurkacji. W pracy [I] badamy jednowymiarowy model, w którym logistyczny wzrost biomasy drzew (przy założeniu, że trawy wypełnią całą pozostałą im przestrzeń) zaburzany jest w losowych momentach – oznaczających wybuchy pożarów – przez utratę losowej części zgromadzonej biomasy. Z kolei w pracy [II] badamy model dwuwymiarowy,

uwzględniający bezpośrednio również biomasę traw i jej tempo wzrostu, ale przyjmujący wielkość strat w biomacie roślin jako ustaloną część dotychczas zgromadzonej (wartości w momencie wystąpienia pożaru). W obu artykułach do opisu modelu wykorzystujemy PDMPs i – badając indukowane przez nie *półgrupy stochastyczne* – uzasadniamy matematycznie wpływ losowych pożarów na możliwość (typowej dla sawanny) długotrwałej koegzystencji tych grup roślin.

W kolejnej części rozprawy rozbudowujemy modele z [I] i [II] o dodatkowe zmienne, wprowadzając do nich obecność roślinożerców i uwzględniając wpływ ich występowania na biomasy traw i drzew. Dodatkowo proponujemy podejście umożliwiające uwzględnienie „zaburzenia środowiskowego” o stałej zmienności (okresowego) – sezonowości (w przypadku sawanny: pory suchej oraz mokrej). Jej występowanie jest bardzo ważne dla wielu różnych ekosystemów, niestety uwzględnienie sezonów w modelach matematycznych przysparza wielu trudności technicznych w ich badaniu. W pracy [III] podejmujemy temat w nowy dla tego problemu sposób – poprzez zastosowanie PDMPs z dwoma rodzajami przełączeń: skoków w przestrzeni fazowej (straty wywołane pożarami) w losowych momentach i o losowej sile zniszczeń oraz dyskretne zmiany dynamiki modelu w ustalonych odstępach czasu, to jest podczas zmiany sezonów. W zaproponowanych PDMPs, okresowość dodatkowej zmiennej czasowej (liczącej upływ czasu od ostatniej zmiany sezonu) uniemożliwia nam badanie zbieżności rozkładów do rozkładu stacjonarnego i zamiast tego badamy zbieżność średnich z rozkładów dla takich procesów. W szczególności podajemy warunki, dla których dowodzimy istnienia rozkładów stacjonarnych dla biomas traw i drzew (a także populacji wprowadzonych dodatkowo roślinożerców). Wykorzystane metody umożliwiają zastosowanie analogicznego podejścia dla tego typu procesów przy występowaniu większej liczby sezonów.

Ostatnia część rozprawy – oparta o publikację [IV] – dotyczy modeli, w których losowo występujące zaburzenia środowiskowe wpływają równocześnie na wszystkie osobniki. Przewodzenie rozważań z perspektywy całej populacji prowadzi nas do badań na nieskończonej wymiarowej przestrzeni stanów (reprezentujących gęstość populacji). Badanie odpowiednich równań na ewolucję gęstości przysparza wielu formalnych trudności – w literaturze (dotyczącej fizyki statystycznej) pojawiają się wyniki pod postacią wyznaczenia równań na momenty dla losowo zaburzanych procesów dyfuzji. Rozszerzamy te wyniki dla szerszej klasy procesów – opisywanych *półgrupami stochastycznymi z losowymi przełączeniami* – oraz badamy dla nich zachowanie *średniej procesu w długim czasie*.