Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Krzysztofa Bielasa
Applications of topos theory to quantum physics

Rozprawa doktorska pana mgr. Krzysztofa Bielasa poświęcona jest kilku fundamentalnym problemom fizyki teoretycznej, do badania których zastosowano zaawansowane metody algebraiczne. Przez podejście algebraiczne rozumiem tu (tak samo jak autor rozprawy) zapoczątkowany przez von Neumanna opis mechaniki kwantowej poprzez algebry operatorów, gdzie strukturę hilbertowską odzyskuje się poprzez konstrukcje typu Gelfanda-Naimarka-Segala, a strukturę probabilistyczną poprzez twierdzenie Gleasona. Następnym krokiem jest badanie struktur logicznych na operatorach rzutowych (logiki kwantowe, badanie których również rozpoczął von Neumann we współpracy z Garrettem Birkhoffem). Kulminacyjnym, a przynamniej najnowszym etapem rozwoju tego sposobu patrzenia na mechanikę kwantową jest „przetłumaczenie" go na język teorii kategorii, w szczególności występującą w tytule rozprawy teorię toposów. „Na rynku" są dwa kategoryczne podejścia do mechaniki kwantowej: historycznie nieco wcześniejsze rozwijane przez Ishama i Döringa oraz „holenderskie" Heunena, Landsmana i Spittersa. Choć, na pierwszy rzut oka, są one podobne, to drugie (tu również piszący te słowa zgadza się z autorem rozprawy) jest nieco atrakcyjniejsze. Pozwala on bowiem na łatwiejsze badanie związków między mechaniką kwantową i klasyczną. Autorzy nazwali ten program „bohryfikacją", gdyż jest, przynajmniej częściową, realizacją idei Bohra, wedle której wszelkie zjawiska kwantowe, pomimo ich nieklasycznego charakteru, powinny być opisywane w kategoriach klasycznych. W tym sensie celem bohryfikacji jest znalezienie „dobrze zachowującej" się przestrzeni fazowej dla układu kwantowego. Oczywiście taka przestrzeń fazowa nie jest, w ogólności, przestrzenią topologiczną ale obiektem teorio-kategorycznym ('locale'), który, z kolei, można badać poprzez odpowiadającą mu kratę ('frame'). A stąd już blisko do porównywania układów klasycznych i kwantowych.

Drugim filarem, na którym oparte są rozważania przedstawione w rozprawie (i na tym, tzn. połączeniu obu filarów, polega przede wszystkim jej najbardziej nowatorski i oryginalny charakter) jest teoria modeli, w szczególności pochodzący od Paula Cohena pomysł tzw. *forcingu*, tj. metody konstruowania, czy raczej rozszerzania istniejących modeli teoriomnogościowych do innych o zdanych własnościach. Badania dotyczące zastosowań teorii modeli w fizyce zostały zapoczątkowane w latach siedemdziesiątych przez Paula Benioffa próbą odpowiedzi czy i, ewentualnie, jakie modele teorii mnogości ZFC (Zermelo-Fraenkla + pewnik wyboru) i ich forcingowe rozszerzenia mogą być nośnikami dla matematycznego opisu mechaniki kwantowej. W pewnym sensie negatywny wynik Benioffa wpłynął na niezbyt intensywny dalszy rozwój badań tego typu (choć, zdaniem piszącego te słowa, problematyka jest fascynująca). Chlubnym wyjątkiem jest środowisko naukowe, w którym powstała recenzowana rozprawa.

Rozprawa doktorska pana Bielasa składa się z siedmiu rozdziałów i dwóch dodatków. Rozdziały 1-3 oraz oba dodatki poświęcone są wprowadzeniu do problematyki rozprawy (rozdział 1) oraz opisu jej matematycznego aparatu, wybranych aspektów teorii kategorii i teorii modeli (rozdział 2 i dodatek B) oraz strukturom krat operatorów rzutowych na przestrzeniach Hilberta (rozdział 3 i dodatek A). Opis jest bardzo dobry, logicznie spójny i wyczerpujący w zakresie niezbędnym dla śledzenia wątków oryginalnych. Utrzymany został na odpowiednim poziomie rygor matematyczny. Bibliografia, do której odwołuje się autor, zawiera wszystkie znane recenzentowi podstawowe prace z obszarów poruszanych w rozprawie.

Oryginalna część dysertacji to rozdziały 4-7. Powstała ona głównie na bazie czterech oryginalnych, współautorskich prac autora opublikowanych w latach 2015-2023 w czasopismach i książkach o zasięgu międzynarodowym.

U podstaw rozważań przedstawionych w rozdziale 4 leży hipoteza, że w różnych skalach zjawiska fizyczne opisywane są za pomocą różnych modeli, np. odpowiednich przestrzeni topologicznych, toposów, czy modeli ZFC (*vide supra*). Przejście od jednego modelu do innego dokonuje się w wyniku pewnych „gwałtownych" procesów (np. inflacji we wczesnym etapie ewolucji Wszechświata). Obserwacje narzucają pewne ograniczenia na wybór konkretnych modeli. Tak więc, zakładamy, że w dużej skali czasoprzestrzeń jest modelowana za pomocą gładkiej rozmaitości lokalnie dyfeomorficznej z $\mathbb{R}^n$, gdzie $\mathbb{R}$ jest prostą rzeczywistą, tzn. ciałem algebraicznym uporządkowanym, domkniętym w sensie Dedekinda. Wszystkie modele mocy kontinuum takiego ciała są izomorficzne, co oznacza jednoznaczność modelu w rozpatrywanej skali. Z drugiej strony, zgodnie z hipotezą, na poziomie mikroskopowym („kwantowym") liczby rzeczywiste mogą być skonstruowane w ramach jakiegoś modelu ZFC. Ponieważ różne modele ZFC o danej mocy mogą nie być izomorficzne istnieje wiele sposobów konstruowania „kwantowych liczb rzeczywistych". Odpowiednie modele ZFC można powiązać ze strukturą kraty rzutowań na przestrzeni Hilberta układu kwantowego, a mianowicie model taki jest wyznaczony przez maksymalną algebrę Boole'a wybraną z kraty rzutowań. Wielkoskalowa gładka struktura $\mathbb{R}^n$ ma być w dobrze określonym (opisanym w pracy) „granicą klasyczną" struktury kwantowej wyznaczonej przez kratą rzutowań. Otrzymanym w pracy, nieoczywistym wynikiem jest, że z konieczności granica klasyczna jest czterowymiarową strukturą egzotyczną (tzn. topologicznie, ale niekoniecznie dyfeomorficznie lokalnie równoważną $\mathbb{R}^4$) o nieznikającej krzywiźnie. Wynik ten uważam za doniosły i bardzo interesujący. Jest to chyba najważniejszy wynik rozprawy. Ciekawą kontynuacją tego wątku (tzn. koniecznej egzotyczności struktury wielkoskalowej) jest oszacowanie wielkości stałej kosmologicznej.

Krótki rozdział 5 rozprawy ma charakter raczej matematyczny prezentujący kategoryczny opis struktur egzotycznych. Autor podaje tu czysto teorio-kategoryczny opis zależności między rodziną boolowskich podalgebr kraty operatorów rzutowych na przestrzeni Hilberta a kategorią gładkich rozmaitości, który to związek wykorzystany był, w nieco innym sformułowaniu, w rozdziale poprzednim. W omawianym rozdziale Autor analizuje tę zależność na dwa sposoby. Drugi z nich wykorzystuje koncepcję „toposu bazylejskiego"? (Basel topos).

Jak wspomniałem powyżej, rozdział 5 ma charakter czysto matematyczny. Treści, czy interpretacji fizycznych w nim niewiele. Nie jest więc on zbyt istotny z punktu widzenia całej rozprawy, chociaż zapewne zadowoli wszystkich entuzjastów teorii kategorii jako uniwersalnego narzędzia matematycznego.

Rozdział 6. pracy poświęcony jest pasjonującemu zagadnieniu, jaki jest problem losowości. Autor omawia podstawowe koncepcje losowości, tzn. próby zdefiniowania tego, że dany ciąg liczbowy jest „ciągiem losowym": złożoność Kołmogorowa (Kołmogorowa-Chaitina), losowość w sensie Martina-Löfa i „przewidywalność" (w terminach martyngałów). Omawia kompetentnie ich znane ułomności i równoważności między nimi. W Twierdzeniu 29 pojawia się losowość w sensie Schnorra, która w żadnym innym miejscu rozprawy się nie występuje. Nie ma ona związku z głównymi tezami pracy i nie ma potrzeby jej wprowadzania (bez definicji). Jeszcze jedna uwaga. W Uwadze 34., przy omawianiu determinizmu mechaniki klasycznej, autor stwierdza, że twierdzenie Picarda-Lindelöfa nie gwarantuje całkowitego (*complete,* cokolwiek miałoby to znaczyć) determinizmu. Traktuję to jako rodzaj skrótu myślowego. Otóż wspomniane twierdzenie mówi, iż rozwiązania, przy spełnieniu odpowiednich założeń (warunek Lipschitza) są jednoznaczne, co w dobrze określonym sensie implikuje ich deterministyczny charakter. W wypadku przytoczonej jako kontrprzykład tzw. kopuły Nortona (*Norton's dome*), jak zauważa autor, warunek Lipschitza, po prostu, nie jest spełniony. Mechanika klasyczna, dopuszcza formalnie takie niedeterministyczne sytuacje.

Wróćmy jednak do istotnych spraw dyskutowanych w rozdziale 6. Jak powszechnie wiadomo, antidotum na niedostatki klasycznych generatorów losowości ma być mechanika kwantowa, teoria „wewnętrznie losowa", w odróżnieniu od jakiejkolwiek teorii klasycznej, gdzie źródło losowości leży po stronie „epistemologicznej", a nie „ontologicznej", czyli w taki lub inny sposób, źródłem tym jest niedokładna znajomość warunków początkowych.

W rozdziale 6. Autor analizuje losowość mechaniki kwantowej za pomocą omówionego wcześniej aparatu modeli i rozszerzeń forcingowych ZFC. Niestety, o ile sama problematyka przedstawiona jest w sposób przejrzysty, istotne części, w szczególności udowodnione twierdzenia i ich dowody przedstawione są w dość skrótowy i, niekiedy, z trudem dający się śledzić sposób. W efekcie nie jest łatwo stwierdzić, jakie są główne, czy najważniejsze wyniki rozważań. Dla piszącego te słowa takimi są: Twierdzenie 29 (*n*-losowość mechaniki kwantowej) i Twierdzenie 31 (o generycznych pomiarach systemu kwantowego).

Główną część rozprawy zamyka rozdział 7., w którym Autor podsumowuje krótko otrzymane wyniki i zarysowuje tematykę wynikających z nich ewentualnych dalszych badań w postaci czterech krótkich akapitów. Bez wahania należy przyznać, że wszystkie otwierają ciekawe perspektywy badawcze.

Podsumowując: jak jasno wynika z tego, co napisałem w powyżej w całej recenzji, uważam, że rozprawa doktorska pana mgr. Krzysztofa Bielasa zawiera wiele oryginalnych, ciekawych i nietrywialnych wyników. Napisana jest dobrze, mimo kilku uchybień, o których powyżej wspomniałem. Czego, być może, brakuje, to nieco pogłębionej dyskusji dotyczącej konkretnych zjawisk fizycznych, które mogłyby mieć bezpośredni związek z prezentowaną w rozprawie zaawansowaną matematyką. Jednak trzeba też przyznać, że celem rozważań o charakterze takim, jak zaprezentowany w pracy, nie jest zazwyczaj opis konkretnych zjawisk fizycznych, ale ustalenie pewnych fundamentalnych struktur mogących grać rolę matematycznych podstaw teorii fizycznych. Pod tym względem rozprawa całkowicie spełnia oczekiwania.

Konkludując stwierdzam, że rozprawa doktorska pana mgr. Krzysztofa Bielasa pt. *Applications of topos theory to quantum physics* spełnia wszelkie formalne i zwyczajowe warunki stawiane takim rozprawom i wnoszę o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Digitally signed by
Marek Marcin Kuś
Date: 2024.10.09
23:49:09 +02'00'

Warszawa, 9.10.2024

prof. dr hab. Marek Kuś
Centrum Fizyki Teoretycznej PAN