Dr hab. Jacek Chmieliński, prof. UKEN
Instytut Matematyki
Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej
w Krakowie

Kraków, 19 czerwca 2024.

Recenzja pracy doktorskiej
Pana **Timothy Nadhomiego**
pt. *Functional inequalities connected to Sugeno integral and its applications*

Rozprawa doktorska pana Timothy Nadhomiego porusza kilka wątków. Część ściśle matematyczną rozprawy stanowią zagadnienia związane z nierównościami funkcyjnymi typu Hermita-Hadamarda. Klasyczna postać tej nierówności, dla rzeczywistej funkcji wypukłej f określonej na przedziale I:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \qquad x, y \in I$$

nawiązuje do średniej arytmetycznej, która pojawia się w dolnym i górnym oszacowaniu całki. W omawianej tu rozprawie pojawiają się różne wersje powyższej nierówności, formułowane dla różnego rodzaju funkcji wypukłych, związanych z różnymi typami średnich (w szczególności quasi-arytmetycznymi i typu Lagrange'a). Część rozprawy poświęcona jest zastosowaniom w matematyce finansowej, w tzw. nowoczesnej teorii portfela. Wreszcie, ważną częścią rozprawy są nowe (czy wręcz nowatorskie) metody komputerowe pozwalające na praktyczne wyznaczanie rozwiązań nierówności funkcyjnych określonego typu.

Dysertacja powstała na bazie pięciu publikacji, których doktorant jest autorem (w przypadku jednej) lub współautorem (w pozostałych). Dodatkowo nawiązuje do publikacji innego autora, na którą wpływ miały jednak obserwacje doktoranta.

Łącznie, cała rozprawa liczy 92 strony i składa się (nie licząc wstępu, streszczeń, oświadczeń itp.) z czterech głównych rozdziałów, poprzedzonych rozdziałem przygotowawczym. Około 1/3 tekstu stanowią opisy komend w języku programowania *Python* dotyczące stworzonego programu oraz opisy jego działania na kilkudziesięciu dobranych przykładach. Całość zamyka spis literatury liczący 65 pozycji, w większości cytowanych (z różną intensywnością) w tekście rozprawy. Około 10 pozycji bibliograficznych nie jest powiązanych bezpośrednio z tekstem.

Treść rozprawy i jej ocena merytoryczna

Omówię pokrótce merytoryczną zawartość dysertacji, dokonując jednocześnie oceny jej poszczególnych fragmentów. Odwołuję się do numeracji i tytułów odpowiednich rozdziałów w pracy.

2. Preliminaries

Oznaczony jako drugi, rozdział *Preliminaries* zawiera podstawowe definicje i twierdzenia związane przede wszystkim z miarą rozmytą oraz całkami Sugeno i Choqueta. Rozdział ten ma charakter wprowadzający, nie ma w nim nowych wyników; w zamierzeniu ma zaznajomić czytelnika z pojęciami, oznaczeniami i klasycznymi własnościami wykorzystywanymi w dalszej części. Niestety, redakcja tego fragmentu pracy pozostawia wiele do życzenia. Zdarzają się błędy. Trochę niejasna jest sama definicja miary i całki Sugeno (można mieć wątpliwości co jest dziedziną miary μ i funkcji f). Definiując tę całkę autor używa oznaczeń ($\wedge$, $\vee$), które wyjaśnia dopiero później (za to dwukrotnie). W przykładzie *Example 2.4* jest odwołanie do *Example 2.6*. Można pomyśleć, że to literówka i chodzi o *Example 2.3*, jednak później okazuje się, że ten sam przykład pojawia się po raz drugi, teraz istotnie pod numerem 2.6. Podobnie *Definition 2.7, Example 2.5, Example 2.6, Definition 2.8 i Example 2.7* są dokładnym powtórzeniem wcześniejszego fragmentu rozdziału. W rozdziale pojawiają się niezdefiniowane oznaczenia (np. w definicji całki Shilkreta).

Ponadto sądzę, że to właśnie w tym rozdziale wstępnym powinna pojawić się (podana znacznie później) definicja średniej oraz własności i rodzaje średnich. Są to bowiem pojęcia, których używa się praktycznie w całej pracy.

3. Hermite-Hadamard Inequality

Trzeci rozdział - najdłuższy w całej rozprawie, pokrywa się z publikacją pt. *On a class of functional inequalities, a computer approach*, napisaną przez doktoranta wspólnie z C.P. Okeke, M. Sablikiem i T. Szostokiem. W rozdziale bada się nierówności postaci

$$a_1 f(\alpha_1 x + (1-\alpha_1)y) + \cdots + a_n f(\alpha_n x + (1-\alpha_n)y) \leqslant \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt.$$

z niewiadomą funkcją ciągłą $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i dla ustalonych nieujemnych a_i, α_i takich, że $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Wykorzystując znane wcześniej wyniki opracowano algorytm, który w zależności od sytuacji, w dwóch lub trzech krokach pozwala podać rozwiązania nierówności jako funkcje wypukłe (lub wklęsłe) odpowiedniego rzędu. W pierwszym kroku, w oparciu o wynik Bessenyei'go-Pálesa formułuje się warunek konieczny: rozwiązanie nierówności musi być funkcją wypukłą (bądź wklęsłą) odpowiedniego rzędu, który można wyznaczyć algorytmicznie. Następnie w oparciu o wyniki Denuita-Lefevre'a-Shakeda i Shakeda-Shanthikumara formułuje się dwa warunki wystarczające których sprawdzenie wymaga obliczenia liczby przecięć dwóch dystrybuant. Trzeba zatem wykonać pewne proste obliczenia, jednak w bardzo dużej liczbie. Zadanie to ułatwia program komputerowy w środowisku *Python Sagemath*, stworzony przez doktoranta wraz ze współautorami. Program ten w oparciu o podane wyżej trzy kroki podaje opis rozwiązań danej nierówności. Zastosowanie tego komputerowego kodu zostało przedstawione na 37 przykładach, weryfikujących nierówności badane we wcześniejszych pracach różnych autorów, w szczególności związane z metodami całkowania numerycznego. W niektórych przykładach podano czas potrzebny na wykonanie obliczeń (zakładam, że w porównywalnych warunkach) co pozwala na porównanie ich złożoności. Są też przykłady, w których program nie podaje rozwiązania tzn. stwierdza, że "this equation does not belong to class (1)", przy czym użycie (1) jest tu niezrozumiałe. Niestety, nie jestem w stanie wypowiedzieć się na temat prawidłowości działania programu, choć podane przykłady wydają się to potwierdzać. Na końcu rozdziału znajdują się pewne uwagi, nie do końca jasne. W *Remark 4* jest odniesienie do *Example 3.26* ale chodzi chyba o inny przykład. Postawiona jest pewna hipoteza, która jak się w międzyczasie okazało została już wykazana.

Generalnie, treść tego rozdziału należy uznać za interesującą z uwagi na prawdopodobnie pierwszą próbę stworzenia programu komputerowego rozwiązującego nierówności funkcyjne. Wcześniej stosowane metody komputerowe dotyczyły określonego typu równań funkcyjnych.

4. Quasi-arithmetic means

Następny (czwarty) rozdział poświęcony jest średnim quasi-arytmetycznym i pokrywa się z samodzielnym artykułem doktoranta *Sugeno Integral for Hermite–Hadamard inequality and quasi-arithmetic means* opublikowanym w Annales Mathematicae Silesianae w 2023 roku.

W rozdziale rozważa się nierówności typu

$$f\left(M_\phi(x,y,t)\right) \leqslant M_\psi(f(x), f(y), t)$$

gdzie M_ϕ, M_ψ są średnimi quasi-arytmetycznymi. Definiują one odpowiednie rodzaje wypukłości funkcji f, dla których można rozważać nierówności typu Hermite'a-Hadamarda. Autor nawiązuje do wcześniejszych prac (Mitroi-Siridon) i przedstawia takie nierówności dotyczące najpierw całki względem miary probabilistycznej borelowskiej, a następnie formułuje ich odpowiedniki dla całki Sugeno. Jako wnioski, dobierając odpowiednio generatory ϕ, ψ, uzyskuje się szczegółowe nierówności dla różnych rodzajów funkcji wypukłych opartych na konkretnych średnich (liniowej, harmonicznej, geometrycznej) lub parach różnych średnich (np. funkcje geometryczno-harmonicznie wypukłe).

Wyniki zawarte w tym rozdziale są dość dobrze opisane (z dokładnością do drobnych uchybień redakcyjnych) i uważam je za ciekawe. Artykuł, na bazie którego powstał ten rozdział (w odróżnieniu od innych) nie ma współautorów, więc dowodzi umiejętności prowadzenia przez doktoranta samodzielnej pracy naukowej.

5. Lagrangian mean

W rozdziale piątym rozważa się średnie Lagrange'a. Rozdział ten odpowiada publikacji *On a characterization of the logarithmic mean*, napisanej wspólnie z M. Sablikiem i J. Sikorską.

Rozdział rozpoczyna się od podania definicji średniej Lagrange'a jako średniej postaci

$$\mu(x,y) = \begin{cases} f^{-1}\left(\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt\right), & x \neq y; \\ x, & x = y \end{cases}$$

generowanej przez ciągłą, ściśle monotoniczną funkcję $f\colon I \to \mathbb{R}$ określoną na przedziale I. Później pojawia się nieco inaczej zdefiniowana średnia (również nazywana średnią Lagrange'a), a także *rozszerzone* i *uogólnione* średnie logarytmiczne. Gdzieś pomiędzy nimi pojawia się sama definicja średniej (chociaż o średnich mówi się już od dawna w pracy).

W rozdziale rozważa się również funkcje log-wypukłe, czy ogólniej φ-wypukłe czyli takie, że złożenie rozważanej funkcji z funkcją φ jest funkcją wypukłą. W szczególności rozważa się funkcje r-wypukłe (dla funkcji potęgowej $\varphi(x) = x^r$). Prezentowane są wyniki, w których podaje się nierówności będące uogólnieniami jednej (górnej) z nierówności Hermite'a-Hadamarda. Bada się również pewne związki funkcji φ-wypukłych ze średnimi Lagrange'a.

Organizacja tego rozdziału oraz komentarze mogłyby być nieco poprawione. Są też pewne nieścisłości. Na przykład w dowodzie twierdzenia *Theorem 5.3* autor na samym początku odwołuje się do nieistniejącego (a przynajmniej tak nie oznaczonego) wzoru (5.3).

Ostatni fragment omawianego rozdziału nawiązuje do artykułu J. Sándora *On upper Hermite-Hadamard inequalities for geometric convex and log-convex functions* z 2014 roku, w którym doktorant zauważył błąd. Podane w pracy Sándora twierdzenie okazuje się nieprawdziwe, co uzasadnione jest nie tylko przez podany (kontr)przykład (*Example 5.1*) ale i analizę dowodu przedstawionego w artykule. Wskazując na błąd w lemacie, na którym opiera się rozważane twierdzenie doktorant podaje jego poprawną wypowiedź (*Lemat 5.6*). Z tego co mi wiadomo, J. Sándor został poinformowany o zauważonym błędzie i w konsekwencji sam opublikował *Corrigendum* do swojego artykułu.

6. Application of fuzzy integral in portfolio risk management

Ostatni (szósty w pracy) rozdział poświęcony jest matematyce finansowej, a konkretnie zastosowaniu całki rozmytej w zarządzaniu ryzykiem portfela (Portfolio Risk Management) - w nawiązaniu do *nowoczesnej teorii portfelowej* (Modern Portfolio Theory) H. Markowitza i jej późniejszych krytyk i modyfikacji (m.in. przez B. Mandelbrota).

Niewątpliwie ten rozdział odbiega od pozostałych ze względu na specyficzną tematykę, nie do końca bliską recenzentowi. Autor wprowadza pewne pojęcia i opisuje standardowe techniki. Następnie, podane są pewne propozycje nowych algorytmów optymalizacyjnych i związane z nimi programy obliczeniowe. Wprowadza się też całkę d-Choqueta i porównuje jej skuteczność w ocenie ryzyka w porównaniu z metodami opartymi na bazie całki Sugeno i Choqueta. Przeprowadzone jest też studium pewnego szczególnego przypadku, w którym analizuje się 256 możliwości dywersyfikacji portfela i wylicza (również tutaj z pomocą odpowiedniego programu komputerowego) ryzyka i oczekiwane zwroty, a następnie dokonuje ich porównania.

Rozdział opisuje niewątpliwie interesujące nowe metody, poparte pewnymi przykładami. Nie będąc specjalistą w tej tematyce trudno mi ocenić ich praktyczne znaczenie.

Redakcja pracy i pewne uwagi krytyczne

Jak już powiedziano, cała rozprawa jest połączeniem czterech, a w zasadzie trzech tematów (rozdziały 4. i 5. dotyczą bardzo podobnej tematyki). Redakcyjnie jest zestawieniem przygotowywanych wcześniej artykułów naukowych. Jest to dość naturalne rozwiązanie, choć od dysertacji doktorskiej oczekiwałbym nieco większej spójności, lepszego powiązania ze sobą poszczególnych części. Można by też oczekiwać mniejszej lakoniczności, głębszego wprowadzenia w tematykę i przygotowania czytelnika a także szerszych komentarzy niż w artykule publikowanym w specjalistycznym czasopiśmie naukowym.

Brakuje mi jednoznacznej informacji na temat indywidualnego wkładu doktoranta w uzyskanie wyników prezentowanych w poszczególnych rozdziałach (poza 4.). Wiadomo, że zostały one uzyskane w wyniku współpracy z innymi, bardziej doświadczonymi, matematykami. Przyjmuję, że wkład doktoranta był znaczący.

Przechodząc do spraw czysto redakcyjnych muszę stwierdzić spore niedociągnięcia, za które odpowiedzialność spada już całkowicie na doktoranta. Krytycznych uwag w tym zakresie można sformułować wiele. Od ogólnego wyglądu rozprawy, a w szczególności niezbyt przejrzystego wyróżnienia poszczególnych rozdziałów, poprzez stosowanie niejednolitego stylu (np. w nagłówkach rozdziałów), po bardzo dużą liczbę błędów, literówek (nawet w nazwiskach), błędów interpunkcyjnych, czy błędów związanych z edycją wzorów, przepełnień itp. Pojawiają się (chyba niezamierzone) powtórzenia nawet całych partii tekstu (np. w podrozdziale 2.2). Numeracja twierdzeń, lematów, przykładów itp., jest wprawdzie konsekwentna ale każde takie środowisko jest numerowane osobno. Ponadto, w niektórych przypadkach numeracja jest podwójna (lub nawet potrójna) - odwołująca się do numeru rozdziału, a czasami pojedyncza. Numeracja formuł (1)-(55) jest ciągła, niezależna od rozdziałów. Trochę ta różnorodność utrudnia odszukiwanie odpowiednich fragmentów pracy, do których autor później się odwołuje. Pomijam tu już kwestię ewidentnych pomyłek i odwoływania do niewłaściwych części tekstu, czy też wręcz do nieistniejących. Sporo jest także błędów językowych (gramatycznych). Większość tych usterek rzuca się w oczy niemal natychmiast i jak sądzę można je było dość łatwo wyeliminować, poświęcając pewien czas na wykonanie korekty całego tekstu przed jego złożeniem.

Konkluzja

Przedstawiona rozprawa dowodzi posiadania przez pana T. Nadhomiego zarówno odpowiedniej wiedzy merytorycznej, jak i umiejętności prowadzenia badań matematycznych (samodzielnie lub w ramach zespołów badawczych). Niezależnie od moich (różnego rodzaju) krytycznych uwag stwierdzam, że rozprawa przedstawia zarówno oryginalne wyniki teoretyczne (oryginalne rozwiązanie problemu naukowego), jak i ich zastosowania. W szczególności, nowatorskie metody dotyczące komputerowo wspomaganego rozwiązywania pewnych typów nierówności funkcyjnych. Przedstawione w rozprawie wyniki powstały w wyniku współpracy badawczej. Uznaję jednak, że samodzielny wkład autora w uzyskanie tych wyników, jak również ich opracowanie w formie recenzowanej rozprawy, w wystarczającym stopniu spełnia jakościowe i ilościowe wymagania zwyczajowo stawiane rozprawom doktorskim.

Biorąc powyższe pod uwagę, wnoszę o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów postępowania, w szczególności do publicznej obrony rozprawy doktorskiej.