dr hab. Wojciech Jabłoński
Katedra Matematyki
Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

Kielce, 5 lipca 2024 r.

Recenzja pracy doktorskiej magistra Timothy'ego Nadhomi

Functional inequalities connected to Sugeno integral and its applications

Przedstawiona rozprawa doktorska została przygotowana w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach pod opieką naukową prof. dra hab. Macieja Sablika. Praca liczy 86 stron, jest napisana jest w języku angielskim i składa się ze wstępu oraz pięciu rozdziałów. Rozprawę poprzedzają streszczenia w języku angielskim i języku polskim, zaś zakończona jest ona obszerną bibliografią zawierającą 65 pozycji. W omówieniu ocenianej pracy stosuję numerację rozdziałów przyjętą przez jej Autora.

Autor deklaruje, że większość przedstawionych w rozprawie wyników pochodzi z następujących pozycji:

[1] T. Nadhomi, *Sugeno Integral for Hermite–Hadamard inequality and quasi-arithmetic means*, Annales Mathematicae Silesianae 37 (2023), no. 2, 294–305.

[2] C. P. Okeke, W. Ogala and T. Nadhomi, *On symbolic computation of C.P. Okeke functional equations using Python programming language*, Aequat. Math. (2023).

[3] J. Sándor, *Corrigendum to "On upper Hermite–Hadamard inequalities for geometric-convex and log-convex functions"*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 2022, Vol. 28, No. 2, 380–381.

[4] T. Nadhomi, M. Sablik and J. Sikorska, *On a characterization of the logarithmic mean* (wysłane do publikacji).

[5] T. Nadhomi, C. P. Okeke, M. Sablik and T. Szostok, *On a class of functional inequalities, a computer approach* (wysłane do publikacji).

[6] T. Nadhomi, C. P. Okeke and M. Sablik, *Portfolio selection based on a fuzzy measure* (wysłane do publikacji).

1. Omówienie zasadniczych wyników rozprawy

W ocenianej rozprawie rozważane są nierówności związane z szeroko rozumianym pojęciem wypukłości funkcji rzeczywistych. W rozdziale drugim zamieszczone zostały podstawowe wiadomości dotyczące miary rozmytej, miary i λ-miary Sugeno oraz całek Sugeno i Choqueta. W kolejnych czterech rozdziałach Autor omawia główne wyniki przedstawionej pracy.

Pierwsze trzy z tych rozdziałów poświęcone są możliwym odpowiednikom klasycznej nierówności Hermite'a-Hadamarda rozważanym dla różnych klas funkcji wypukłych. Wiadomo, że jeśli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem oraz $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą (w klasycznym rozumieniu tego pojęcia), to zachodzi następująca nierówność Hermite'a-Hadamarda:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad \text{dla wszystkich } x, y \in I, x \neq y. \tag{1}$$

Problem ten można oczywiście rozważać dla szerszych klas funkcji. Zakładając, że $I, J \subset \mathbb{R}$ są przedziałami oraz $M\colon I \times I \to I$, $N\colon J \times J \to J$ są średnimi, przy pewnych dodatkowych założeniach nierówność

$$f(M(x,y)) \leqslant \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\mathrm{d}t \leqslant N(f(x), f(y)) \qquad \text{dla } x, y \in I, x \neq y,$$

zachodzi dla każdej (M, N)-wypukłej funkcji $f\colon I \to J$, tj. dla funkcji spełniającej

$$f(M(x,y)) \leqslant N(f(x), f(y)) \qquad \text{dla } x, y \in I.$$

Dużym zainteresowaniem matematyków cieszą się też funkcje wypukłe wyższych rzędów. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Dla funkcji $f\colon I \to \mathbb{R}$ definiujemy

$$f[x] := f(x) \quad \text{dla} \quad x \in I,$$

$$f[x_1, \ldots, x_{n+1}] := \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_2, \ldots, x_n]}{x_n - x_1} \quad \text{dla} \quad x_1, \ldots, x_n \in I,\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2.$$

Ustalmy $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Funkcję $f\colon I \to \mathbb{R}$ nazywamy n-wypukłą, jeśli

$$f[x_1, \ldots, x_{n+2}] \geqslant 0 \qquad \text{dla } x_1, \ldots, x_{n+2} \in I.$$

Tak określone pojęcie jest naturalnym uogólnieniem klasycznej wypukłości, w szczególności 1-wypukłość oznacza wprost wypukłość funkcji.

W rozdziale trzecim przedstawione są wyniki zawarte w publikacji [5]. Dotoczą one komputerowo-wspomaganej metody badania rozwiązań pewnego uogólnienia klasycznej nierówności Hermite'a–Hadamarda. Podobne algorytmy pozwalające wyznaczyć rozwiązywania pewnych klas równań funkcyjnych są rozwijane od ponad dwudziestu lat. Opisana w tym rozdziale procedura jest prawdopodobnie pierwszym takim podejściem stosowanym do badania nierówności funkcyjnych. Analiza i dobór odpowiednich wyników dotyczących wypukłości prowadzi do konstrukcji opisanej w tym rozdziale metody badania istnienia oraz ewentualnych postaci ciągłych rozwiązań $f\colon I \to \mathbb{R}$ nierówności

$$\sum_{j=1}^{n} a_j f(\alpha_j x + (1-\alpha_j)y) \leqslant \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{dla } x, y \in I, x \neq y, \tag{2}$$

gdzie $\alpha_j \in [0,1]$ oraz $a_j \geqslant 0$ dla $j \in \{1, \ldots, n\}$ są takimi stałymi, że $\sum_{j=1}^n a_j = 1$. Takie ogólne podejście pozwala badać, przy odpowiednim doborze stałych α_j oraz a_j, możliwe uogólnienia obu oszacowań pojawiających się w klasycznej nierówności Hermite'a-Hadamarda (1). Omawiana procedura składa się z maksymalnie trzech kroków.

Krok 1. Kluczowy wynik z pozycji [M. Bessenyei, Zs. Páles, *Characterization of higher order monotonicity via integral inequalities*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A. 140 (4) (2010), 723–736] pozwala stwierdzić, że jeśli funkcje

$$x \mapsto x^k$$

spełniają nierówność (2) dla $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, zaś funkcja $x \mapsto x^{n+1}$ nie spełnia (2), to każde ciągłe rozwiązanie $f\colon I \to \mathbb{R}$ nierówności (2) musi być funkcją n-wypukłą lub n-wklęsłą.

Krok 2. Niech

$$\nu = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{\alpha_j x + (1-\alpha_j)y},$$

gdzie δ_u oznacza miarę skupioną w punkcie u. Dystrybuanta F_λ miary Lebesgue'a jest ściśle rosnąca, zaś dystrybuanta F_ν jest niemalejącą funkcją prostą (schodkową). Wyznacza się tu liczbę możliwych "punktów przecięcia" obu dystrybuant (możliwe są dwa przypadki: przecięcie "na węźle" $\alpha_j x + (1-\alpha_j)y$ oraz przecięcie "między kolejnymi węzłami"). Wykorzystując wynik z [M. Denuit, C. Lefevre and M. Shaked, *The s-convex orders among real random variables, with applications*, Math. Inequal. Appl. 1 (4) (1998), 585–613] Autor wnioskuje, że jeśli liczba punktów przecięcia jest równa liczbie n otrzymanej w pierwszym kroku, to wszystkie n-wypukłe funkcje f (odpowiednio n-wklęsłe funkcje f, co zależy od znaku różnicy $F_\lambda - F_\nu$ na "ostatnim węźle") spełniają rozważaną nierówność (2).

Krok 3. Niech G będzie dystrybuantą pewnej miary probabilistycznej na $\mathbb{R}$. Przyjmiemy $G^{[0]}(t) = G(t)$ oraz $G^{[k]}(t) = \int_{-\infty}^{t} F^{[k-1]}(s)\mathrm{d}s$. W przypadku, gdy liczba punktów przecięcia otrzymanych w *Kroku 2.* jest większa od liczby n otrzymanej w *Kroku 1.*, wykorzystując wynik z pozycji [M. Shaked and J.G. Shanthikumar, *Stochastic Orders*, Springer Series in Statistics, 2007] należy przeprowadzić analizę znaków różnicy $F_\lambda^{[n]} - F_\nu^{[n]}$, gdzie n jest liczbą wyznaczoną w *Kroku 1.*

Wykonanie opisanych kroków w wielu przypadkach jest bardzo skomplikowane, stąd Autor prezentuje opis algorytmu pozwalającego wykonać niezbędne rachunki numerycznie, w szczególności najbardziej zaawansowane rachunkowo badanie znaku różnicy w *Kroku 3.* Autor ilustruje jego działanie na wielu przykładach. Jak Autor podkreśla, w przypadku negatywnych wyników metoda ta nie pozwala podać charakteryzacji istniejących funkcji n-wypukłych (n-wklęsłych) spełniających rozpatrywaną nierówność. Wiadomo jedynie, że istnieją funkcje n-wypukłe (n-wklęsłe), które tej nierówności nie spełniają.

W kolejnym rozdziale powstałym na bazie pozycji [1] Autor dowodzi odpowiednik nierówności Hermite'a–Hadamarda dla całki Sugeno i funkcji quasi-arytmetycznie wypukłych, tj. dla funkcji $f\colon I \to J$ przekształcających przedział $I \subset \mathbb{R}$ w przedział $J \subset \mathbb{R}$ spełniających

$$f\left(M_\phi(x,y,t)\right) \leqslant M_\psi(f(x), f(y), t) \qquad \text{dla } x, y \in I,\ t \in [0,1],$$

gdzie M_ϕ oraz M_ψ są średnimi quasi-arytmetycznymi generowanymi przez ciągłe i ściśle monotoniczne funkcje $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ oraz $\psi\colon J \to \mathbb{R}$. Funkcję $M_\phi\colon I \times I \times [0,1] \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$M_\phi(x,y,t) = \phi^{-1}\left((1-t)\phi(x) + t\phi(y)\right) \qquad \text{dla } x, y \in I,\ t \in [0,1],$$

Autor nazywa średnią quasi-arytmetyczną generowaną przez ciągłą i ściśle monotoniczną funkcję $\phi\colon I \to \mathbb{R}$[1)]. Główny wynik tego rozdziału stanowi Twierdzenie 4.3 będące uogólnieniem rezultatu dotyczącego nierówności typu Hermite'a-Hadamarda dla całki Sugeno i funkcji wypukłej zawartego w pozycji [A. Ebadian and M. Oraki, *Hermite–Hadamard inequality for Sugeno integral based on harmonically convex functions*, J. Comput. Anal. Appl. 29 (2021), no. 3, 532–543]. Otrzymane wyniki pozwalają na sformułowanie szeregu wniosków dotyczących szczególnych postaci nierówności Hermite'a-Hadamarda dla całki Sugeno i funkcji wypukłych względem różnych średnich quasi-arytmetycznych.

Rozdział piąty powstał w oparciu o wyniki zawarte w pracach [3] oraz [4]. Poświęcony on został w zasadniczej części rozważaniom związanym z odpowiednikiem prawej strony nierówności

[1)] w literaturze średnią tę nazywa się też *quasi-arytmetyczną średnią ważoną.*

Hermite'a-Hadamarda dla funkcji ϕ-wypukłych, tj. funkcji $f\colon I \to J$ spełniających

$$f((1-t)x+ty) \leqslant M_\phi(f(x), f(y), t) \qquad \text{dla } x, y \in I,\ t \in [0,1],$$

gdzie $\phi\colon J \to \mathbb{R}$ jest funkcją rosnącą oraz M_ϕ jest średnią quasi-arytmetyczną generowaną przez ϕ.

Wiadomo, że jeśli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem oraz $f\colon I \to (0,\infty)$ jest funkcją logarytmicznie wypukłą (tzn. funkcja $\ln f$ jest wypukła), to

$$f\left(\frac{x+y}{x}\right) \leqslant \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\mathrm{d}t \leqslant \mathcal{L}(f(x), f(y)) \qquad \text{dla } x, y \in I,\ x \neq y, \tag{3}$$

gdzie $\mathcal{L}\colon (0,\infty)^2 \to (0,\infty)$ jest średnią logarytmiczną określoną wzorem

$$\mathcal{L}(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{\ln x - \ln y} & \text{dla} \quad x, y \in (0,\infty),\ x \neq y, \\ x & \text{dla} \quad x = y \in (0,\infty). \end{cases}$$

Średnia logarytmiczna jest szczególnym przypadkiem ogólniejszej klasy średnich Lagrange'a $M_\varphi\colon I \times I \to I$ postaci

$$M_\varphi(x,y) = \begin{cases} (f')^{-1}\left(\frac{f(x)-f(y)}{y-x}\right) & \text{dla} \quad x, y \in I,\ x \neq y, \\ x & \text{dla} \quad x = y \in I, \end{cases}$$

gdzie $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest określoną na przedziale otwartym $I \subset \mathbb{R}$ funkcją klasy C^1 mającą różnowartościową pochodną.

Główny wynik tego rozdziału zawarty jest w Twierdzeniu 5.2, które stanowi pewien odpowiednik prawej strony nierówności Hermite'a-Hadamarda dla funkcji ϕ-wypukłych z oszacowaniem wykorzystującym odpowiednio zdefiniowaną średnią Λ_ϕ. Uzupełnieniem tego rezultatu jest wynik opisany w Twierdzeniu 5.3, który pokazuje, że przy założeniu, że średnia Λ_ϕ pojawiająca się w poprzednim twierdzeniu jest średnią Lagrange'a (generowaną również przez ϕ), to z dokładnością do przekształceń afinicznych musi być ona średnią arytmetyczną.

Uzupełnieniem omówionych wyników są w tym rozdziale uwagi dotyczące błędu pojawiającego się w oszacowaniu nierówności pojawiającej się w Twierdzeniu 2.5 z pozycji [J. Sándor, *On upper Hermite-Hadamard inequalities for geometric-convex and log-convex functions*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 20(5), (2014) 25-30].

Ostatni, szósty rozdział omawianej rozprawy został opracowany na podstawie pozycji [6]. Zawarta jest tu próba zastosowania miar rozmytych, w szczególności λ-miary Sugeno oraz całki d-Choquet'a do analizy ryzyka w procesie podejmowania decyzji inwestycyjnych. Autor bierze pod uwagę model zaproponowany w 1952 roku przez H. Markowitza. Pomimo elementarnej prostoty i atrakcyjności model ten ma też wiele wad, które Autor omawia w podrozdziale 6.3.1. Zasadniczą wadą wydają się przyjęte miary ryzyka (np. odchylenie standardowe) opierające się na pewnych rozkładach, które nie są w stanie odzwierciedlać złożonej struktury i braku przewidywalności rynków finansowych. Autor stwierdza tutaj, że zastosowanie nieaddytywnych miar rozmytych w zarządzaniu ryzykiem portfela pozwoli na dokładniejsze opisanie profilu ryzyka portfela. Zaproponowana zostaje nowa miara ryzyka zdefiniowana w oparciu o poziom redukcji wartości danego aktywa. Użycie całki d-Choqueta do wyznaczenia ryzyka portfela aktywów w opinii Autora lepiej uwzględnia dywersyfikację. Pracę kończy przykład zastosowania opisanych w tym rozdziale narzędzi.

2. Ocena pracy

Problematyka rozważana w ocenianej rozprawie jest interesująca i nad wyraz aktualna. Opisane rezultaty są oryginalnymi rozwiązaniami rozpatrywanych w pracy problemów. Bardzo ważnym osiągnięciem jest tutaj opisana w rozdziale trzecim konstrukcja metody pozwalającej badać postać ciągłych rozwiązań nierówności (2). Wymagało to właściwego użycia trzech wcześniej już znanych wyników. Zaskakujące jest tu nieoczywiste, ale stosowane już wcześniej, wykorzystanie rezultatów otrzymanych dla zmiennych losowych. Należy jednocześnie docenić fakt, że opisana metoda pozwala na konstrukcję pakietu komputerowego pozwalającego zrealizować tę metodę, zwłaszcza przeprowadzenie skomplikowanych obliczeń w przypadku, gdy zachodzi konieczność zrealizowania *Kroku 3*. Również wysoko oceniam wyniki dotyczące odpowiednika nierówności Hermite'a-Hadamarda dla całki Sugeno w rozdziale czwartym oraz dla funkcji ϕ-wypukłych zaprezentowane w rozdziale piątym. Przedstawione rozumowania, choć są elementarne, to jednak wymagały dużej inwencji. Chciałbym jednak tutaj wyraźnie zaznaczyć, że zdecydowana większość rezultatów przestawionych w ocenianej rozprawie powstała w trakcie badań prowadzonych we współpracy z innymi matematykami i jak najbardziej byłoby wskazane załączenie jakichkolwiek informacji, jaki był indywidualny wkład Doktoranta w otrzymanie tych wyników.

Przedstawię teraz kwestie dotyczące ocenianej pracy, do których mam największe zastrzeżenia.

Moim zdaniem tytuł rozprawy nie odpowiada w pełni jej zawartości. Jego sformułowanie w tłumaczeniu na język polski jest następujące:

Nierówności funkcyjne związane z całką Sugeno i jej zastosowania.

Wyniki dotyczące tytułowej całki Sugeno pojawiają się jedynie w rozdziale czwartym, incydentalnie pojawia się ona w ostatnim rozdziale dotyczącym modelu Markowitza. Rodzi się więc pytanie, jaki jest związek wyników opisanych w pozostałych rozdziałach z całką Sugeno?

Drugie zastrzeżenie dotyczy deklaracji Autora zawartej w stwierdzeniu (str. 3), że większość wyników umieszczonych w rozprawie bazuje na sześciu publikacjach umieszczonych na zaprezentowanej liście. Nie doszukałem się niestety żadnych wyników z pracy [2] w niniejszej rozprawie. Końcowa część rozdziału piątego powstała na bazie pozycji [3], która nie jest autorstwa magistra Nadhomi. W tej pozycji znajdują się jedynie podziękowania jej autora dla T. Nadhomi oraz M. Sablika za korektę błędu, który pojawił się w pozycji [55]. Liczę na wyjaśnienie tych zastrzeżeń w trakcie obrony pracy doktorskiej. Przedstawione w podrozdziale 5.2 wyniki nie wzbogacają w bardzo istotny sposób całej rozprawy.

Kolejną bardzo istotną kwestią jest sama redakcja ocenianej rozprawy. W moim odczuciu Autor ograniczył się w zdecydowanej większości do umieszczenia w kolejnych rozdziałach zawartości prac, kolejno: [5], [1], [4] i [3], na koniec zaś [6]. W samym rozdziale piątym powstałym na bazie pozycji [4] oraz [3] dwukrotnie pojawiają się różne definicje średniej Lagrange'a (Autor nie zadaje sobie nawet trudu skomentowania ich równoważności), średnia logarytmiczna raz jest oznaczana symbolem $\mathcal{L}$ (materiał na podstawie pozycji [4]), później pojawia się definicja tej średniej i użyte jest oznaczenie L (ta część powstała na bazie pozycji [3]). Analizowane w rozdziale piątym funkcje ϕ-wypukłe są w istocie badanymi wcześniej w rozdziale czwartym funkcjami (id, ϕ)-quasi arytmetycznie wypukłymi. Kompleksowe informacje na temat średnich powinny być moim zdaniem umieszczone w rozdziale drugim.

Materiał zaprezentowany na stronach 9–11 (od Definicji 2.7 do komentarza po Przykładzie 2.7) jest dokładną kopią zawartości niniejszej pracy ze stron 6–8 (od Definicji 2.4 do komentarza po Przykładzie 2.4).

Na koniec chciałbym skomentować wybór miary pozwalającej wyznaczyć ryzyko portfela aktywów. Do jego obliczenia Autor pracy używa całki d-Choqueta, a wybór uzasadnia obliczeniami przeprowadzonymi w Przykładzie 6.3 twierdząc, że (w przekładzie na język polski):

"... całka d-Choqueta zapewnia dokładniejszą reprezentację ryzyka związanego z portfelami, podkreślając korzyści z dywersyfikacji...".

Moim zdaniem takie uzasadnienie nie jest wystarczające. Autor kończy ten rozdział przykładem zastosowania zaproponowanej metody, który niestety jest czysto teoretyczny. Brakuje tutaj pokazania praktycznego zastosowania opisanego podejścia. W szczególności, Autor nie opisuje:

- jak wyznaczyć stopy zwrotu poszczególnych instrumentów finansowych (w przykładzie są one już zadane),
- jak wyznaczyć ryzyka tych instrumentów (w analizowanym przykładzie również są z góry zadane).

Brakuje też porównania zaproponowanego podejścia z klasycznym modelem Markowitza, gdzie stopa zwrotu instrumentów jest średnią stóp zwrotu obliczoną na podstawie danych z przeszłości, zaś ryzyko instrumentu jest określane jako odchylenie standardowe stóp zwrotu. Bardzo wartościowa byłaby symulacja opisanej metody przeprowadzona dla portfela aktywów z dowolnej giełdy papierów wartościowych i porównanie wyników otrzymanych z zastosowaniem:

a) zaproponowanego modelu,
b) klasycznego modelu Markowitza.

Zaprezentowane w tym rozdziale podejście na pewno wymaga jeszcze bardziej szczegółowych uzasadnień.

Przejdę teraz do omówienia najważniejszych usterek, które zauważyłem w ocenianej pracy. Pominę tutaj niedociągnięcia typograficzne (jak brak spacji i znaków interpunkcyjnych) oraz językowe. W tym ostatnim przypadku nie jestem specjalistą, ale część komentarzy zawartych w ocenianej pracy jest zupełnie niezrozumiała. Chociażby już tytuł pozycji [1] powinien moim zdaniem brzmieć: *Hermite–Hadamard inequality for Sugeno integral and quasi-arithmetic means.*

1. W Definicji 2.4 pojawia się pojęcia rozmytej miary znormalizowanej, jednak zdefiniowana wcześniej miara rozmyta z definicji jest znormalizowana. Ponadto wygodniej jest przyjąć $A_k = \bigcup_{j=k}^{n} X_j$ bez użycia symbolu miary.

2. Na stronie 11 (linia 11 od góry) Autor używa pojęcia "continuous Sugeno integral", którego wcześniej nie definiuje. Jednocześnie nie jest zaznaczone, skąd pochodzi przyjęta definicja uogólnionej całki Sugeno.

3. Podrozdział 3.4 jest pusty! Zakładam, że dalsze podrozdziały 3.5–3.9 powinny być sekcjami w podrozdziale 3.4. We wszystkich przykładach nierówności zawierające x oraz y jako zmienne rozpatrywane są dla funkcji $f\colon [x, y] \to \mathbb{R}$. Uważam, że tutaj powinno być $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ (por. wykresy zamieszczone w przykładach). W Przykładzie 3.1 funkcja spełniająca rozważaną nierówność jest "1-convex". Na koniec, od Przykładu 3.4 Autor podaje czas realizacji algorytmu wykonanego w każdym przykładzie. Taka informacja nie niesie za sobą absolutnie żadnej wiedzy, jeśli nie jest zamieszczona dodatkowo specyfikacja sprzętu, na którym te czasy zostały osiągnięte!

4. Wyniki zawarte w Proposition 2 oraz Twierdzenie 4.2 pochodzą z pozycji cytowanych w spisie literatury, więc zamieszczone dowody są zbędne.

5. W Twierdzeniu 4.1 brakuje założeń odnośnie rozważanej miary μ. Ponadto, wynik przedstawiony w Twierdzeniu 4.3 jest niestety bardzo niechlujnie sformułowany. Poprawniejsze sformułowanie można znaleźć w pracy [1], choć i tam brakuje założeń odnośnie monotoniczności funkcji ϕ, ψ oraz miary μ użytej w całce Sugeno.

6. Na stronie 49 (linia 5 od góry) w definicji $P(\alpha)$ przed ostatnim składnikiem w liczniku powinien się pojawić znak minus.

7. Poważne zastrzeżenia budzi określenie wielkości α (równość (29) we Wniosku 4.3.2). Czy wiadomo, że $B^2 - 4AC \geqslant 0$ dla przyjętych wielkości A, B, C?

8. W nierówności (32) na stronie 52 użyta jest średnia logarytmiczna, której definicja pojawia się (z innym oznaczeniem, o czym już wspomniałem) dopiero na stronie 59.

9. Poważne zastrzeżenia budzi też komentarz umieszczony bezpośrednio po przyjętej na stronie 53 definicji funkcji φ-wypukłej. Pojawia się tu założenie, że funkcja φ jest rosnąca i określona na obrazie funkcji $f\colon I \to \mathbb{R}$ (o której nic dodatkowo nie jest założone). Poniżej znajduje się uwaga, że jeśli φ jest różnowartościowa, to zachodzi nierówność (33). Po pierwsze, funkcja φ jest ściśle rosnąca, więc musi być różnowartościowa. Ponadto, bez dodatkowych założeń nie ma pewności, że wartość

$$t\varphi(f(x)) + (1-t)\varphi(f(y))$$

mieści się w obrazie funkcji φ, więc (33) nie jest prawidłowo uzasadnione.Wydaje się, że najwygodniej byłoby przyjąć, że $I, J \subset \mathbb{R}$ są przedziałami, $f\colon I \to J$ oraz $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją ściśle rosnącą. Tak powinien też wyglądać początkowy fragment sformułowania Twierdzenia 5.2. Dodatkowo w dowodzie powinno pojawić się uzasadnienie, dlaczego istnieje całka oznaczona po lewej stronie nierówności (40).

10. W Przykładzie 6.3 Autor prezentuje jedynie końcowe wyniki w ostatniej tabeli na stronie 74. Dla zrozumienia konstrukcji miary ryzyka korzystniejsze byłoby przedstawienie rachunków dla portfela B z tego przykładu w miejsce prostego podstawienia do wzoru zaprezentowanego w poprzednim Przykładzie 6.2.

Duża część wskazanych usterek bardzo istotnie obniża ogólny poziom przedstawionej pracy, jednak większość z nich nie wpływa na ocenę jej merytorycznej zawartości. Dlatego moja ocena tej rozprawy jest **pozytywna**.

3. Konkluzja

Oceniana rozprawa przedstawia oryginalne rozwiązania badanych zagadnień i prezentuje ogólną wiedzę Autora w dyscyplinie matematyka. Rozprawa świadczy też o umiejętności samodzielnego prowadzenia badań naukowych przez magistra Nadhomi w dyscyplinie matematyka. Zatem stwierdzam, że rozprawa spełnia warunki określone w art. 187 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2023 r. poz. 742, 1088 i 1234) **i wnioskuję o dopuszczenie magistra Timothy'ego Nadhomi do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dyscyplinie matematyka**.