

dr hab. Justyna Jarczyk, prof. UZ  
Instytut Matematyki  
Uniwersytet Zielonogórski

Recenzja rozprawy doktorskiej  
mgra Timothy'ego Nadhomiego

pt. *Functional inequalities connected to Sugeno integral and its applications*

Przedstawiona praca doktorska pana Timothy'ego Nadhomiego została napisana pod kierunkiem prof. dra hab. Macieja Sablika, pracownika Uniwersytetu Śląskiego.

Rozprawa poświęcona jest pewnym nierównościami funkcyjnym związanym z całką Sugeno, a w szczególności tym związanym z uogólnionymi nierównościami Hermite'a-Hadamarda. W rozwiązywaniu niektórych z nich autor stosuje program komputerowy. W przypadku równań funkcyjnych podejście takie było już stosowane, natomiast w przypadku nierówności należy je uznać za nowatorskie.

Dysertacja składa się z 6 rozdziałów i liczy 81 stron.

Pierwsze dwa rozdziały to wprowadzenie czytelnika w tematykę rozprawy, przedstawienie definicji i faktów niezbędnych do uzasadnienia otrzymanych przez autora nowych wyników. Autor wprowadza pojęcia miary probabilistycznej w szczególnym przypadku  $\sigma$ -algebry generowanej przez skończone rozbitcie zbioru, miary rozmytej,  $\lambda$ -miary Sugeno, oraz całek Choqueta oraz Sugeno ilustrując je pewnymi dobrze dobranymi przykładami.

W rozdziale 3 doktorant opisuje procedurę działania programu komputerowego, napisanego w Paytonie, użytego do szacowania pewnych nierówności Hermite'a-Hadamarda. Konstrukcja programu jest całkowicie nowatorska i opiera się między innymi na wynikach związanych z wykorzystaniem narzędzi porządków stochastycznych (por. Twierdzenie 3.1 z rozprawy pochodzące z pracy [16]) oraz teorii funkcji wypukłych wyższego rzędu (por. Twierdzenie 3.2 z rozprawy cytowane z pracy [57]). Autor przedstawia prawie 40 zastosowań programu w zależności od podanych parametrów, otrzymując między innymi znane już nierówności np. nierówność typu Bullena dla funkcji 3-wypukłych w Przykładzie 3.26. Jest to najobszerniejsza część rozprawy.

Kolejny rozdział poświęcony jest pewnemu wariantowi nierówności (1) z całką Sugeno. Autor szacuje tu całkę Sugeno funkcji quasi-arytmetyczno wypukłej ( $(\psi, \phi)$ -quasi-arytmetyczno wypukłej, gdzie  $\psi, \phi$  są generatorami tych średnich). Uogólnia on jeden z wyników otrzymanych w pracy [40]. Doktorant podaje także przykłady szacowania całki Sugeno w przypadku funkcji  $(x, x)$ ,  $(x, 1/x)$ -quasi-arytmetycznej. Jako jeden z wniosków przedstawia też oszacowanie całki Lebesgue'a funkcji quasi-arytmetyczno wypukłej.

Rozdział 5 autor rozpoczyna od wprowadzenia pojęć średniej logarytmicznej, funkcji logarytmiczno-wypukłej (log-wypukłej) oraz funkcji  $\phi$ -wypukłej, średniej Lagrange'a. Następnie bada górną nierówność Hermite'a-Hadamarda dla logarytmicznie wypukłych średnich Lagrange'a. Główne wyniki tego rozdziału to Twierdzenia 5.2 oraz 5.3 pokazujące, że średnia logarytmiczna jest jedyną średnią Lagrange'a spełniającą górną nierówność Hermite'a-Hadamarda. W tej części autor poprawia jedno z fałszywych oszacowań przedstawionych w pracy [55, Theorem 2.5]. Przykład 5.1 pokazuje, że szacowanie z pracy [55] jest fałszywe, natomiast prawidłowe oszacowanie podają lematy 5.5 i 5.6.

Ostatnia część pracy poświęcona jest matematyce finansowej. Doktorant przedstawia zastosowanie miary rozmytej w zarządzaniu ryzykiem portfela, proponując nowe podejście. Omawia zastosowanie nieaddytywnych miar rozmytych jako alternatywy dla tradycyjnych wskaźników ryzyka, takich jak odchylenie standardowe. Rozważa problem wyboru portfela podobny do modelu Markowitza, w którym używa miary rozmytej (transformacja miary  $\lambda$  Sugeno) i całki d-Choqueta do tworzenia efektywnej granicy. Ze względu na ograniczenia nowoczesnej teorii portfela (MPT) i jej oparcie na założeniach o rozkładzie normalnym, wprowadza nieaddytywne miary rozmyte, które nie zakładają określonych rozkładów prawdopodobieństwa, ale oddają dywersyfikację i zależność w charakterystyce aktywów. Takie podejście pozwala uwzględnić niedokładności i niepewności na rynkach finansowych, zapewniając pełniejsze zrozumienie ryzyka portfela. Biorąc pod uwagę dywersyfikację i zależności między aktywami, nieaddytywne miary rozmyte oferują obiecującą metodę dokładniejszej analizy ryzyka i podejmowania świadomych decyzji inwestycyjnych.

Rozprawa doktorska powstała na podstawie jednej samodzielnej pracy autora i trzech współautorskich maszynopisów

1. T. Nadhomi, Sugeno Integral for Hermite–Hadamard inequality and quasi-arithmetic means. *Annales Mathematicae Silesianae* 37 (2023), no. 2, 294–305. <https://doi.org/10.2478/amsil-2023-0007>.
2. T. Nadhomi, M. Sablik and J. Sikorska, On a characterization of the logarithmic mean. Submitted.
3. T. Nadhomi, C. P. Okeke, M. Sablik and T. Szostok, On a class of functional inequalities, a computer approach. Submitted.
4. T. Nadhomi, C. P. Okeke and M. Sablik, Portfolio selection based on a fuzzy measure. Submitted.

Czytając rozprawę odnosiłam nieodparte wrażenie, że jest to nie do końca przemyślana kompilacja powyższych prac. Szczególnie rozdziały 4 i 5 mogłyby być spójniej zredagowane. Za zaletę uważam jednak fakt, że po raz pierwszy użyto programu komputerowego do rozwiązywania nierówności funkcyjnych. Ciekawe jest też nowatorskie zastosowanie miary rozmytej w zarządzaniu ryzykiem portfela. Dowody przedstawione w pracy są przeważnie techniczne, niemniej jednak wymagają dobrej orientacji w zakresie szeroko rozumianej analizy matematycznej, teorii całki, równań funkcyjnych, a także probabilistyki. Wyniki uzyskane przez pana mgra Timothy’ego Nadhomiego są ciekawe i wartościowe. Pokazują, że doktorant posiada umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

Poniżej przedstawiam kilka szczegółowych uwag dotyczących recenzowanej rozprawy.

1. Po definicji 2.1 brakuje mi komentarza, że funkcja skończenie addytywna określona na rodzinie  $\mathcal{X}$  jest w istocie przeliczalnie addytywna.
2. Autor niezręcznie wprowadza pojęcia definiowane używając w definicji spójnika równoważności (por. np. definicje 2.1, 2.2).
3. Definicje 2.7 i 2.8 oraz przykłady 2.6 i 2.7 to dokładnie definicje 2.4 i 2.5 oraz przykłady 2.2 i 2.4 wprowadzone kilka stron wcześniej.

4. We wzorze (13) brakuje złożeń o  $\alpha_i$ . Definicja funkcji  $n$ -wypukłej ze str. 14 powinna nastąpić zaraz po definicji funkcji wypukłej lub zamiast niej (str.1, Definicja 1.1).
5. Definicja ważonej średniej quasi-arytmetycznej powinna poprzedzać definicję funkcji  $(\phi, \psi)$ -wypukłej.
6. Uwaga 6 powinna być uzasadniona i sformułowana bardziej ogólnie, nie tylko dla funkcji  $\psi$ , a dla dowolnego generatora średniej quasi-arytmetycznej.
7. Funkcje  $M_\psi$  oraz  $M_\phi$  określone na str. 43<sub>1</sub> oraz str. 44<sup>2</sup> nazywamy ważonymi średnimi arytmetycznymi.
8. Prawidłowe cytowanie literatury zawsze poprawia komfort czytania pracy. Stwierdzenie 2 ze str. 44 nie pochodzi z pracy [1].
9. W Twierdzeniu 4.2 brakuje założenia  $f(I) \subset J$ .
10. Twierdzenie 4.3 sformułowane jest bardzo niestarannie. Autor nie zadbał ani o dziedziny występujących tu generatorów średnich, ani o ich monotoniczność. Wprowadzając oznaczenie średnich  $M_\psi$ ,  $M_\phi$  warunek funkcji quasi-arytmetyczno wypukłej należało zapisać z wykorzystaniem tych oznaczeń. Nie wiadomo też czym jest zbiór  $\mathbf{F}$ , który wcalej pracy pojawia się tylko w sformułowaniu tego twierdzenia.
11. W dowodzie Twierdzenia 4.2 brakuje informacji o tym z jakiego zbioru wybrany jest  $x$  i jakie są jego relacje z liczbami  $a$  oraz  $b$ . Definiowany tam  $t_x$  powinien być liczbą z przedziału  $[0, 1]$ .
12. Definicję średniej oraz jej pewne własności przytoczone w rozdziale 5 w ostatnim akapicie na stronie 53 należało umieścić na początku rozdziału 4.
13. Numerowanie wzorów, na które autor nie powołuje się w dalszej części pracy jest zabiegiem dla mnie niejasnym i utrudniającym czytanie rozprawy. Wzory (2), (3), (4), (6), (8), (9), (10), (11), (12), (14), (15), (18), (21), (26) i wiele innych powinno pozostać bez numeracji.
14. Ujednolicenie i wprowadzenie wspólnej numeracji definicji, lematów, twierdzeń, przykładów (dwucyfrowa), wniosków (trójcyfrowa), uwag (jednocyfrowa) i wzorów ułatwiłoby czytanie pracy.
15. Ponad 15% prac umieszczonych w bibliografii nie zostało zacytowanych w rozprawie np. prace [1], [12], [17], [25], [26], [33], [34], [46], [47], [48], [65].
16. Na estetykę pracy niekorzystnie wpływają wzory i tabele wychodzące na marginesy stron.

Powyższe uwagi nie wpływają jednak istotnie na zawartość merytoryczną pracy.

## Konkluzja

W mojej ocenie omawiana rozprawa doktorska pana Timothy'ego Nadhomiego pt. „Functional inequalities connected to Sugeno integral and its applications” spełnia zarówno wymagania zwyczajowe, jak i te stawiane pracom doktorskim przez ustawę z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. 2021 poz. 478 z późn. zm.). Uważam, że rozprawa zawiera oryginalne rozwiązania nowych problemów matematyczno-ekonomicznych. Po zapoznaniu się z rozprawą jestem przekonana, że jej autor opanował wiedzę teoretyczną i metody badawcze niezbędne do samodzielnego prowadzenia badań naukowych. Wnoszę więc o dopuszczenie pana mgra Timothy'ego Nadhomiego do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora w dyscyplinie matematyka.

Zielona Góra, 24 czerwca 2024 r.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Justyna Jarczyk'.