Dr hab. Michał Ziembowski prof. PW
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
Email: michal.ziembowski@pw.edu.pl

Warszawa, 03 listopada 2023r.

Recenzja w sprawie o nadanie stopnia doktora habilitowanego pani doktor Roksanie Słowik

Podstawą analizy wniosku jest siedem samodzielnych prac zaliczonych do cyklu *Macierze trójkątne nieskończone skończonego rzędu oraz ich iloczyny* przedstawionego jako osiągnięcie naukowe habilitantki. Prace zostały opublikowane w dobrych czasopismach w latach 2013 - 2022.

Ocena osiągnięcia naukowego

Głównym tematem prac zaliczonych do cyklu są rozważania dotyczące nieskończonych macierzy. Przez macierz nieskończoną rozumie się dowolną funkcję $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to R$, gdzie R jest łącznym, przemiennym pierścieniem z jedynką, natomiast $\mathbb{N}$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych.
Dla tak zdefiniowanych macierzy wprowadza się dodawania po współrzędnych, tzn. dla $A = [a_{ij}]_{i,j \in \mathbb{N}}, B = [b_{ij}]_{i,j \in \mathbb{N}}$ mamy $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i, j \in \mathbb{N}$.
Aby wprowadzić w "naturalny sposób" mnożenie macierzy i zapewnić jego łączność najczęściej rozpatruje się jeden z następujących pierścieni macierzowych $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nad ustalonym pierścieniem R: $M_{Cf}(R)$ (Cf – column finite), $M_{Rf}(R)$ (Rf – row finite), $M_{RCf}(R)$ (RCf – row and column finite), które w każdej kolumnie, odpowiednio wierszu lub kolumnie i wierszu, mają skończoną liczbę elementów niezerowych. W przypadku gdy R jest ciałem wprowadza się operację mnożenia macierzy przez skalar również w naturalny sposób co powoduje, że w $M_{Cf}(R)$ (odpowiednio M_{Rf}), otrzymujemy strukturę algebry.

Precyzując główne osiągnięcie naukowe przedstawione przez habilitantkę, należy powiedzieć, że dotyczy ono w dużej części grupy zawartej w $M_{Cf}(F)$ (F jest tutaj ciałem) a mianowicie grupy $T_\infty(F)$ składającej się z macierzy górnotrójkątnych o elementach odwracalnych na głównej przekątnej oraz podgrup tej grupy.

W pierwszej z omawianych prac [A1] rozpatrywana jest grupa $\pm UT_\infty(F)$ (F jest ciałem) nieskończonych macierzy górnotrójkątnych w których na głównej przekątnej występują tylko elementy 1 lub -1. W pracy pokazano, że każdy element $A \in \pm UT_\infty(F)$ jest produktem co najwyżej pięciu inwolucji. Ponadto, w przypadku gdy charakterystyka F nie jest równa 2 każdy element A rozpatrywanej grupy jest produktem czterech inwolucji.

W mojej opini wynik jest ciekawy i wpisuje się dobrze w istniejącą literaturę związaną z przedstawioną w artykule tematyką. W dowodach wykorzystuje się znane fakty z literatury i ciekawe obserwacje dotyczące elementów rozpatrywanych struktur.

Praca [A2] zawiera wynik przedstawiający warunki konieczne i dostateczne na to aby element grupy G gdzie G jest grupą macierzy górnotrójkątnych $T_n(F)$ stopnia n o niezerowych elementach na głównej przekątnej (F jest ciałem charakterystyki różnej od 2) albo $G = T_\infty(F)$ był inwolucją.

Dowody przedstawione w omawianej pracy są sprytnymi i zgrabnymi przeliczeniami dotyczącymi rozpatrywanych elementów wspomnianych wyżej grup. Nie ma w nich zaskakujących pomysłów ale w mojej opini wynika to z charakterystyki rozpatrywanych zagadnień. W tym kontekście, wyrażam opinię, że habilitantka doskonale daje sobie radę z panowaniem nad strukturą rozpatrywanych elementów.

W kolejnej pracy [A3] przedstawionej w omawianym cyklu, badane są generatory grup $T_n(F)$ i $T_\infty(F)$ w przypadku gdy F jest ciałem q elementowym. W pracy wykazano, że w przypadku gdy F jest ciałem o q elementach i $q > 2$, każda ze wspomnianych powyżej grup jest generowana przez wszystkie macierze rzędu $q-1$. Panadto, każdy element jest produktem co najwyżej czterech macierzy których rzędy są dzielnikami $q-1$. Powyższy wynik posłużył do wykazania, że grupa Vershika-Kerova $GL_{VK}(F)$ dla ciała q $(q > 2)$ elementowego F także jest generowana przez elementy rzędu $q-1$.

Tematyka generatorów grup jest jedną z głównych w teorii grup a w mojej opini przedstawiona praca dobrze w nią się wpisuje. Przedstawione dowody są dość techniczne. Przy czym, zawierają zgrabne przeliczenia i obserwacje dotyczące elementów omawianych grup. Dzięki temu czytelnik jest prowadzony przez kolejne etapy dowodów z poczuciem dużej płynności.

W pracy [A4] kontynuowane są rozważania dotyczące grup $T_\infty(F)$ i $T_n(F)$ (F jest ciałem). Podano w niej warunki konieczne i dostateczne na to aby element $g \in G$ (tutaj, G jest jedną z wyżej wspomnianych grup) był elementem rzędu k przy założeniu, że charakterystyka F jest różna od k.

Praca jest bardzo techniczna a przejście przez wszystkie kroki dowodów przyznam, że było niemałym wyzwaniem. Oczywiście rozumiem, że wspomniany techniczny charakter dowodów wynika ze specyfiki zagadnień. Należy więc kolejny raz w tym miejscu z uznaniem wyrazić się o umiejętności habilitantki w prowadzeniu tak zawiłych technicznie rozumowań.

Prace [A5] i [A6] dotyczą grup Riordana i ich uogólnień. Grupy Riordana oznaczane są przez $\mathcal{R}(S)$ (S jest albo równe $\mathbb{Z}$ albo $\mathbb{C}$). Elementemi tej grupy są pary $(g(z), f(z))$ funkcji analitycznych $g(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \ldots$ i $f(z) = f_1 z + f_2 z^2 + \ldots$ gdzie $g_0, f_1 \neq 0$. Mnożenie jest zdefiniowane następująco:

$$(g(z), f(z)) \star (g'(z), f'(z))) = (g(z)g'(f(z)), f'(f(z))).$$

Warto wspomnieć, że elementy omawianej grupy mogą być widziane jako nieskończone macierze dolnotrójkątne. W omawianej pracy [A5] mamy $S = \mathbb{Z}$. Z racji na to, że zbiór inwolucji w grupie Riordana $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$ jest jednoelementowy i równy $\{(1, z)\}$, wprowadza się w tym kontekście tak zwane pseudo inwolucje. Element $R \in \mathcal{R}$ jest pseudo inwolucją jeśli $R \star (1, -z)$ jest inwolucją. W omawianej pracy znajdujemy twierdzenie mówiące o tym, że jeśli $R = (g(z), f(z)) \in \mathcal{R}$ jest pseudo inwolucją i ma nieujemne współczynniki oraz $g_1 \neq 0$, to $f(z)$ jest jednoznacznie zdeterminowana przez $g(z)$. Powyższy wynik podaje częściową odpowiedź na otwarte pytanie zadane przez Louisa Shapiro. W pracy [A6] rozpatruje się inwolucje w strukturach, które są, jak zostało to wspomniane, uogólnieniami grup Riordana.

Kolejny raz z natury rozpatrywanego zagadnienia, omawiane prace są bardzo techniczne. Poza tą stroną, w dowodach habilitantka posługuje się znaną literaturą i faktami dotyczącymi rozpatrywanych grup co pozwala wprowadzić czytelnika w kontekst w jaki wpisują się badane obiekty.

Praca [A7] to kontynuacja badań dotyczących grup Riordana. Jak zostało już wspomniane, elementy grupy Riordana $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ mogą być widziane jako nieskończone macierze dolnotrójkątne. W omawianej pracy pokazano, że jeśli R jest elementem grupy $\mathcal{R}(\mathbb{C})$, który na głównej przekątnej ma tylko element 1, to R może być zapisany jako produkt co najwyżej 5 elementów grupy $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ których rzędy są skończone. Panadto, jeśli R może być zapisany jako produkt inwolucji, to może być zapisany jako produkt czterech inwolucji.

Praca [A7] jest napisana przejrzyście a dowody oprócz technicznej strony zawierają ciekawe wykorzystanie znanych faktów dotyczących badanych grup.

Prace skłądające się na cykl zostały opublikowane w dobrych i bardzo dobrych czasopismach, tematyka badań powoduje, że prace są bardzo techniczne. Niemniej, habilitantka w sposób nieuciążliwy przeprowadza czytelnika przez kolejne etapy dowodów. Liczba cytowań 83, w tym 23 autocytowania, nie jest imponująca, ale zadowalająca z uwagi na to, że niektóre artykuły ukazały się niedawno a tematyka jest w wąskim kręgu zainteresowań, moim zdaniem z uwagi na trudności techniczne.

Pozwala to na zdecydowaną konkluzję, że osągnięcie naukowe stanowi znaczny wkład autorki w rozwój dyscypliny naukowej.

Ocena działalności naukowej, organizacyjnej i dydaktycznej

Pozostały dorobek obejmuje trzydzieści pięć prac i dwie monografie naukowe. Wspomniana liczba artykułów oraz analiza wyników w nich się znajdujących, pozwala stwierdzić, że habilitantka jest bardzo aktywnym matematykiem o ukształtowanym kierunku badań. Publikuje w dobrych i bardzo dobrych czasopismach co świadczy bardzo dobrze o wartości otrzymywanych wyników.

Wykaz wystąpień na krajowych lub międzynarodowych konferencjach naukowych nie jest imponujący ale wystarczający aby stwierdzić, że habilitantka wykazuje się dostateczną aktywnością w tym obszarze.

W przedstawionym w Autoreferacie wykazie recenzowanych prac naukowych znajdujemy informacje, które pozwalają stwierdzić, że ta strona działalności naukowej dr Słowik jest bardzo mocna.

Na uwagę zasługuje działalność dydaktyczna habilitantki. Z informacji podanych w Autoreferacie wynika, że dr Słowik od wielu lat prowadzi zajęcia z wielu przedmiotów dla studentów matematyki. Dr Słowik wypromowała 14 licencjantów i jest promotorem pomocniczym rozprawy doktorskiej mgra Michała Różańskiego.

Ogólne wrażenie

Moje ogólne wrażenie po analizie dorobku naukowego, a zwłaszcza cyklu prac *Macierze trójkątne nieskończone skończonego rzędu oraz ich iloczyny*, jest dobre. Tematyka badań wymusza to, że prace dr Słowik są bardzo techniczne i wymagaja bardzo sprawnego panowania nad strukturą rozważanych obiektów. Według mnie autorka w każdym z przypadków daje sobie z tym dobrze radę. Uważam, że habilitantka wyróżnia się głębokim zrozumieniem zagadnień, które pojawiają się w obszarze bliskim Jej zainetersowaniom. To świadczy o dojrzałości matematycznej dr Słowik a jednocześnie daje pewność, że stopień o który się ubiega pozwoli wypromować w przyszłości doktoraty, których składową będą wyniki dotyczące obiektów studiowanych przez habilitantkę.

Niestety nie mogę uniknąć wypowiedzenia kilku słów krytyki. W pracach nie doszukałem się wypracowania jakiegoś narzędzia przydatnego w dowodzeniu twierdzeń. Jakiegoś śladu, który byłby charakterystyczny dla habilitantki i był Jej oryginalnych pomysłem. Oczywiście charakterystyka rozważanych zagadnień powoduje, jak juz wielokrotnie wspomniałem, że dowody są bardzo techniczne i obliczeniowe. Wykorzystuje sie w nich znane fakty bądź spostrzeżenia, które są kolejnym krokiem w prowadzonym rozumowaniu. To natomiast wystarczy do otrzymywania ciekawych moim zdaniem wyników. W tym jednak kontekście, zasadnym jest uwaga o tym, że dr Słowik nie podjęła się na przestrzeni lat badań nad jakimkolwiek zagadnieniem, które wymagałoby wypracowania jakichkolwiek nowych metod dowodzenia lub czegoś co moglibyśmy określić słowem "nowatorskie".

Wniosek

Reasumując uważam, że pomimo wspomnianych uwag dorobek naukowy dr Roksany Słowik, w szczególności przedstawione osiągnięcie naukowe jest cyklem powiązanych tematycznie artykułów naukowych, które stanowią znaczny wkład w rozwój badań nad macierzemi nieskończonymi. Spełnione są moim zdaniem, wymagania zwyczajowe a także formalne (określone w artykule 219 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce z dnia 20 lipca 2018 roku) stawiane kandydatom ubiegającym się o stopień doktora habilitowanego. W związku z powyższym wnioskuję do Rady Naukowej Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego o dopuszczenie dr Roksany Słowik do dalszych etapów postępowania związanego z nadaniem stopnia doktora habilitowanego.

Michał Ziembowski