dr hab. Maciej Ulas, prof. UJ
Instytut Matematyki UJ
Łojasiewicza 6
30-348 Kraków
email: maciej.ulas@uj.edu.pl

Kraków, 19 lutego 2023 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej
Uogólnienia nierówności Hadamarda oraz twierdzeń Frobeniusa i Dieudonné
autorstwa Pana mgr. Michała Różańskiego

Przedmiotem niniejszej recenzji jest rozprawa doktorska pt. *Uogólnienia nierówności Hadamarda oraz twierdzeń Frobeniusa i Dieudonné* przygotowana przez Pana mgr. Michała Różańskiego. Promotorem pracy jest dr hab. inż. Roman Wituła, prof. UŚ, zaś promotorem pomocniczym jest dr inż. Roksana Słowik. Przedstawiona praca została napisana w języku polskim i liczy 98 stron. Składa się ze Wstępu, trzech rozdziałów oraz bibliografii liczącej 54 pozycje. W dalszej części recenzji wszystkie odnośniki do literatury są według bibliogafii rozprawy, zaś oznaczenia tożsame z oznaczeniami używanymi przez Autora w ocenianej pracy.

Problematyka pracy koncentruje się wokół zagadnienia uogólnienia klasycznych wyników dotyczących szeroko rozumianej teorii macierzy, a dokładniej nierówności Hadamarda i jej wariacji oraz wyników Frobeniusa i Dieudonné dotyczących liniowych odwzorowań macierzowych, które zachowują pewne klasy macierzy.

We Wstępie przedstawiono krótki rys historyczny dotyczący rozwoju i wyników badań poruszanych w pracy. Przedstawiono również motywacje stojącą za podjętymi badaniami oraz zawartość rozprawy z wyszczególnieniem wyników uzyskanych przez Autora.

Rozdział 1 podzielony jest na trzy podrozdziały. Pierwszy podrozdział poświęcony jest uzyskaniu szeregu uogólnień klasycznej nierówności Hadamarda, która mówi, że $\Gamma(x_1,\ldots,x_n) \leq \prod_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$, gdzie $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ jest wyznacznikiem macierzy Grama wektorów $x_1,\ldots,x_n$. Dokładniej, dowodzi się tzw. permutacyjnej wersji nierówności Hadamarda (Twierdzenie 4) postaci

$$\Gamma(x_1,\ldots,x_n) + \prod_{i=1}^{n}|\langle x_i, x_{\sigma(i)}\rangle| \leq \prod_{i=1}^{n}\|x_i\|^2,$$

gdzie $\sigma \in S_n \setminus \{id\}$. Ponadto, podane zostały warunki, które jednoznacznie gwarantują zachodzenie równości. Następnie dowiedziono innych wersji permutacyjnej nierówności Hadamarda oraz wersję zopytmalizowaną dla dodatnio półokreślonych macierzy hermitowskich (Twierdzenie 5) oraz ciekawy i zaskakujący wynik dotyczący osiągania maksimum pewnych iloczynów zawierających iloczyny skalarne wektorów i ich permutacji (Twierdzenie 6).

Drugi podrozdział poświęcony jest różnym uogólnienieniom nierówności von Neumanna, która mówi, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ spełniona jest nierówność

$$|\operatorname{tr}(AB)| \leq \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(A)\sigma_i(B),$$

gdzie dla macierzy M, przez $\sigma_i(M)$ oznaczamy i-tą wartością osobliwą M i dodatkowo zakładamy, że $\sigma_i(M) \geq \sigma_{i+1}(M)$ dla $i = 1,\ldots,n-1$. W Twierdzeniu 22 Autor podaje nowy,

Ulas

elementarny, dowód pewnego uogólnienia powyższej nierówności na większą od dwóch liczbę macierzy (otrzymany wcześniej przez Fana w latach 60-tych). Podobna metoda dowodowa zostaje zastosowana w dowodzie (znanego) Twierdzenia 24. Następne uogólnienie jest poprawioną wersją „twierdzenia" pochodzącego z monografii [38]. Podane tam twierdzenie jest fałszywe, gdyż brakuje założenia dodatniej półokreśloności odpowiedniej macierzy hermitowskiej. Autor pokazuje odpowiedni kontrprzykład i przedstawia swój dowód jako Twierdzenie 25 (z dodanym brakującym założeniem).

Ostatni podrozdział poświęcony jest mocniejszym wersjom nierówności Hadamarda według Krejna. Nie ma tutaj żadnego nowego wyniku i w zasadzie tego rozdziału mogłoby nie być, gdyż w całości opiera się na wynikach Krejna. Lematy 3 i 4 są również znane. Jedynie Przykłady 6, 7 pokazują nietrywialność pytania o postać najmocniejszej wersji nierówności typu Hadamarda (o tym kilka słów niżej).

Rozdział 2 poświęcony jest różnym uogólnieniom twierdzenia Frobeniusa dotyczącego odwzorowań liniowych $L : \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, które zachowują wyznacznik, tzn. spełniają warunek $\det L(X) = \det X$, gdzie $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Klasyczne twierdzenie Frobeniusa było dowodzone przy założeniu, że $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. W późniejszych pracach założenie to było osłabiane (zawsze jednak ciało miało charakterystykę 0). Twierdzenie 30 pokazuje, że analogon twierdzenia Frobeniusa jest prawdziwy nad dowolnym ciałem dowolnej charakterystyki. Dowód tego twierdzenia używa Twierdzenia 31, które charakteryzuje odwzorowania liniowe przeprowadzające klasę macierzy osobliwych na podzbiór klasy macierzy osobliwych. Następnie, w podrozdziale 2.3 dowiedzione jest twierdzenie dotyczące ilości różnych odzworowań postaci PXQ, PX^TQ, gdzie $P, Q \in \mathcal{GL}_n(R), \det(PQ) = 1$ i R jest pierścieniem skończonym. Okazuje się, że rzeczona liczba jest postaci $2|\mathcal{SL}_n(R)|^2$. Autor pracy nie jest w stanie stwierdzić, czy jest to nowy wynik. Piszącemu te słowa twierdzenie to nie było wcześniej znane.

Podrozdział 2.4 poświęcony jest pytaniu dotyczącemu istnienia analogonów twierdzeń Frobeniusa i Dieudonné nad pierścieniami $\mathbb{Z}_k, k \geq 2$. Okazuje się, że w tym przypadku istnieją odwzorowania liniowe, które nie są postaci postulowanej w klasycznych twierdzeniach (Twierdzenie 35 i Twierdzenie 36).

W dalszej części rozdziału uzyskano Twierdzenie 39, które dotyczy osobliwych przekształceń liniowych $L : \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, zachowujących klasę macierzy osobliwych lub nieosobliwych (jest to wzmocnienie wyniku Botty na dowolne ciało $\mathbb{F}$ o co najmniej $n + 1$ elementach).

Rozdział 3, zatytułowany Dodatki, zawiera pewne wyniki dotyczące (niekoniecznie liniowych) przekształceń, które zachowują rząd, wyznacznik lub osobliwości macierzy. Główne wyniki to zaprezentowanie poprawnych dowodów „twierdzeń" uzyskanych przez J. Kalinowskiego w pracach [24, 25, 26]. Jak się bowiem okazuje, dowody zamieszczone w cytowanych pracach zawierają luki, które uzupełnia w rozprawie mgr Różański.

W rozdziale tym znajduje się również dowód twierdzenia o postaci generatorów grupy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_k)$. Nie bardzo rozumiem, dlaczego został on załączony, gdyż wynik ten jest klasyczny i może być prosto otrzymany ze znanego twierdzenia o postaci generatorów grupy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Warto dodać, że przedstawione twierdzenia ilustrowane są dobrze dobranymi przykładami, które pokazują istotność czynionych założeń. Poza tym, na podkreślenie zasługuje fakt, że uzyskane nowe wyniki (lub alternatywne dowody znanych już twierdzeń) wymagały od Autora dużej sprawności technicznej oraz szerokiej wiedzy w operowaniu wynikami klasycznej teorii macierzy.

Odniosę się jeszcze do redakcji pracy. Praca jest napisana dobrym językiem polskim. Pomimo tego, mam w tej materii szereg uwag krytycznych. Dziwi odnoszenie się do konkretnych twierdzeń, lub ogólniej numerowanych zdań, zapisując je małą literą. W mojej opinii utrudnia to czytanie. Podobnie nie rozumiem dlaczego twierdzenia, lematy, definicje numerowane są niezależnie (w każdym przypadku kolejnymi liczbami naturalnym). Utrudnia to odnalezienie poszczególnych sformułowań, gdyż trzeba przeszukiwać pracę w kierunku początku, a niejednokrotnie do przodu. Właśnie ta maniera była dla mnie, jako czytelnika, najbardziej kłopotliwa. Przykładowo, w dowodzie Twierdzenia 33 odwołujemy się do Lematu 6, który znajduje się cztery strony dalej. Nie rozumiem dlaczego wszystkie lematy, których używa się w dowodzie konkretnego twierdzenia nie znalazły się i nie zostały udowodnione przed dowodem tego właśnie twierdzenia. Taki sposób narracji utrudnia śledzenie wywodu. Należy jeszcze wspomnieć o niestandardowym sposobie używania dwukropka. Mianowicie, każde wyśrodkowane (lub by być bardziej precyzyjnym *wydolarowane* w źródle TeX-owym) wyrażenie jest poprzedzone dwukropkiem. W niektórych zdaniach ów dwukropek pojawia się dwa, a nawet trzy razy. Jest to dziwne i w wielu miejscach sprzeczne z regułami języka polskiego.

Do powyższych uwag dodam jeszcze kilka drobiazgów, które udało mi się wychwycić:

- str. 19, linie 5, -7: w miejsce wyrażenia h_{ii} powinno być $(H)_{ii}$;
- str. 13, linia -8: brak wyjaśnienia skrótu CBS. Jest jasne o jaką nierówność chodzi, ale choć raz powinna się pojawić jej pełna nazwa;
- str. 34, linia 15: brak przeciwdziedziny definiowanej funkcji;
- str. 41, linia -3: „I wreszcie w prezentowanej tutaj rozprawie pokażemy" $\rightarrow$ „I wreszcie, w prezentowanej tutaj rozprawie, pokażemy";
- str. 47, linia 13: „Udowodnimy słabszą wersję lematu" $\rightarrow$ „Udowodnimy mocniejszą wersję lematu". Założenie jest słabsze, więc wynik jest mocniejszy. Swoją drogą, dlaczego nie sformułowano lematu w tej mocniejszej wersji?
- str. 52, linia 12: „istnieje odwracalne r" $\rightarrow$ „istnieje taki odwracalny element r";
- str. 63, linia -6: „tożsamość"$\rightarrow$ „tożsamości";
- str. 64, linia 2: „wiec"$\rightarrow$ „więc";
- str. 65, linia 11: „liczby $p_l^{\alpha_l}, \ldots, p_l^{\alpha_l}$"$\rightarrow$ „liczby $p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_l^{\alpha_l}$";
- str. 83 i dalej w podrozdziale 3.1: Zbiór macierzy kwadratowych 2×2 o wyrazach ze zbioru $\mathbb{Z}$ (lub $\mathbb{Z}_k$) i wyznaczniku równym 1 oznacza się zarówno przez $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ jak i $\mathcal{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Wymienione powyżej mankamenty, choć momentami wpływają na czytelność, nie mają wpływu na zawartość merytoryczną pracy.

Zgodnie z tym co zostało napisane we Wstępie, część oryginalnych wyników pracy została uzyskana wspólnie z promotorem rozprawy. Nie jest jednak wyszczególnione jaki był wkład mgr. Różańskiego w powstanie tych wyników. Jest dla mnie jasne, że w naukach matematycznych określenie twórczego wkładu jest trudne, a czasem niemożliwe. Niemniej, z recenzenckiego obowiązku odnotowuję fakt, że do rozprawy nie zostały załączone żadne oświadczenia o wkładzie autorów w uzyskanie wyników wspólnych publikacji (jednakże, zgodnie z obowiązującymi przepisami, nie ma takiego obowiązku).

W pracy przedstawiono szereg uogólnień klasycznych wyników dotyczących nierówności i odwzorowań macierzowych. Część tych wyników było oczekiwanych (np. gdy poza ciałem podkładowym teza samego twierdzenia się nie zmienia), ale część jest zaskakująca (jak np. Twierdzenie 6 czy druga część Twierdzenia 35). Warto podkreślić raz jeszcze, że uzyskanie tych wyników wymagało pomysłowości, sporej sprawności technicznej i biegłości w operowaniu klasycznymi wynikami teorii macierzy. To czego mi brakuje w pracy, to dyskusji dotyczącej dalszych kierunków badań, które można podjąć. Lektura rozprawy nasuwa kilka pytań. I tak, w Przykładzie 6 i Przykładzie 7 porównano klasyczną, zoptymalizowaną oraz wersję Krejna nierówności Hadamarda, sygnalizując, że nie jest jasne, w jakich przypadkach konkretna wersja daje lepsze wyniki. W świetle tego naturalnym jest pytanie o charakteryzację macierzy (być może przy dodatkowych założeniach), gdy wersje te dają takie same wyniki (lub spełniają odpowiednie nierówności). W kontekście Twierdzenia 6 ciekawym jest również pytanie o istnienie takiego zbioru $Z_n \subsetneq T_n$, że prawdziwa jest równość $\max\{\prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)}\rangle| : \sigma \in T_n\} = \max\{\prod_{i=1}^{n} |\langle x_i, x_{\sigma(i)}\rangle| : \sigma \in Z_n\}$, gdzie n jest ustalone i $x_1, \ldots, x_n \in U$. Innymi słowy, czy można wyrzucić pewne tanspozycje z T_n tak by nadal zachodziła równość jak w Twierdzeniu 6? Interesującym byłoby również pytanie, czy Twierdzenie 35 da się przenieść na pierścienie wielomianów (szeregów formalnych) lub pierścienie, które są skończonymi iloczynami kartezjańskimi ciał.

Uważam, że pomimo przedstawionych uwag krytycznych, przedstawiona rozprawa spełnia ustawowe (por. art. 13 ust. 1 Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym) i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim. Przedstawiona praca zawiera nowy materiał, który rozszerza i uzupełnia wiedzę o nierównościach typu Hadamarda oraz odwzorowaniach zachowujących pewne własności macierzy. W związku z tym wnoszę o dopuszczenie Pana mgr. Michała Różańskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.