



Politechnika Łódzka

Instytut Matematyki

Marek Galewski, dr hab., prof. uczelni

Recenzja rozprawy doktorskiej

**"Uogólnienia nierówności Hadamarda
oraz twierdzeń Frobeniusa i Dieudonne"**

p. mgr Michała Różańskiego

Rozprawa doktorska Pana Różańskiego wpisuje się teorię macierzy, a dokładniej dotyczy nierówności macierzowych powiązanych i będących uszczegółowieniem nierówności Hadamarda oraz nierówności von Neumanna, ponadto dotyczy ona inspirowanych wynikami Ferdinanda Frobeniusa, Jeana Dieudonne, Ky Fana przekształceń liniowych macierzy kwadratowych, które zachowują pewne ich wybrane własności.

Recenzowana rozprawa składa się dwóch podstawowych rozdziałów uzupełnionych o dodatek zawierający również szereg istotnych wyników. Autor umiejętnie podaje potrzebny do zrozumienia materiał wprowadzając uzyskane przez siebie, lub jako współautor, rezultaty. Dokładniej:

a) W rozdziale pierwszym Autor wychodząc od dowodu klasycznej nierówności Hadamarda dla gramianu podaje jej permutacyjną oraz zoptymalizowaną wersję, które uzupełniają oraz rozszerzają znane z literatury wersje wspomnianej nierówności. Wyniki z tego rozdziału mają, ze względu na optymalny charakter uzyskanych nierówności, duży potencjał aplikacyjny i w sposób istotny wpisują się w zainteresowania badaczy w innych ośrodkach naukowych.

b) Znacznie bardziej zaawansowany technicznie rozdział drugi dotyczy zagadnień zachowywania przez przekształcenia liniowe pewnych własności macierzy rozważanymi nad pominiętymi dotąd w literaturze ciałami, które nie są algebraicznie domknięte, nad ciałami skończonymi, czy wreszcie nad pierścieniami reszt modulo.

Autor wykazuje, że twierdzenie Frobeniusa jest prawdziwe również dla macierzy nad dowolnym ciałem oraz dodatkowo podaje klasyfikację, dla jakich pierścieni reszt modulo rozważane twierdzenia zachodzą. Rozdział 2 kończy się badaniem przekształceń liniowych zachowujących rząd macierzy kwadratowej.

c) Rozdział trzeci, nazywany dodatkiem, jak się należy domyślać zawiera wyniki uzyskane przez Autora przy okazji pracy nad głównymi wynikami. Składa się z dwóch podrozdziałów zawierających wyniki dotyczące generowania zbiorów macierzy kwadratowych stopnia 2 nad pierścieniem liczb całkowitych oraz nad pierścieniami modulo k oraz pewnych przekształceń macierzy, zachowujących osobliwość i nieosobliwość, rząd lub wyznacznik macierzy.

Praca doktorska Pana Różańskiego napisana jest bardzo starannie, zawiera liczne komentarze, odniesienia do literatury przedmiotu są właściwe i świadczą o tym, że Autor dobrze się porusza w obszarze badawczym związanym z tematem rozprawy. Argumentacja dowodowa jest precyzyjna i klarowna. W mojej opinii wyniki są poprawne i odpowiednio zredagowane. Sposób prezentacji jest właściwy. W mojej opinii najwartościowszymi elementami pracy jest uzyskanie zoptymalizowanej wersji nierówności Hadamarda, co w sposób udany pokazują przykłady zastosowań podane przez Autora oraz uogólnienie twierdzenia Dieudonne, której jednak ma mniejszy walor stosowany. Pan Różański doskonale orientuje się w wynikach naukowych publikowanych w obszarze związanym tematycznie z rozprawą. Za istotne uważam podane przez Autora w rozdziale trzecim (dodatku) istotne korekty wyników znanych z literatury, co świadczy o krytycznej i wnikliwej lekturze tekstów źródłowych, jak i liczne porównania z literaturą przedmiotu opisane w tekście rozprawy.

Oprócz pozytywnych komentarzy na temat pracy mam również pewne uwagi natury krytycznej. Autor podaje za każdym razem pełne argumenty dowodowe, momentami są one jednak nurzące, jak choćby przywoływanie nierówności CBS, która jest narzędziem standardowym. Z jednej strony bardzo to ułatwia czytanie oraz śledzenie argumentacji i sprawdzanie poprawności kroków dowodowych, a z drugiej strony nadmiar łatwych argumentacji niepotrzebnie wydłuża rozprawę. Pewien niedosyt budzi również brak interpretacji geometrycznych prezentowanych wyników. Autor jednocześnie podaje liczne komentarze, objaśnia wprowadzane treści, więc brak takich odniesień jest widoczny. Autor nie ustrzegł się drobnych usterek w rozumowaniach, jak choćby związanych w liniową niezależnością wektorów, ale są one łatwo naprawialne i nie wpływają na wartość rozprawy.

Konkluzja: Nie mam żadnych wątpliwości, iż P. mgr M. Różański jest dojrzałym matematykiem, potrafi stosować aparat badawczy związany z tematyką rozprawy z konieczną precyzją oraz nie mam wątpliwości, że przedłożona rozprawa spełnia wymogi formalne oraz zwyczajowe stawiane pracom doktorskim w dyscyplinie matematyka. Wnoszę o **dopuszczenie** P. mgr Różańskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Łódź, 30.01.2023

Michał Golecki

