

Poznań 25 listopada, 2019

Grzegorz Banaszak  
Profesor zwyczajny  
Wydział Matematyki i Informatyki  
UAM Poznań

### Recenzja rozprawy habilitacyjnej dra Pawła Gładkiego

Zbiór prac dra Pawła Gładkiego, przedstawionych jako rozprawa habilitacyjna, dotyczy hiperciał związanych z formami kwadratowymi, w związku z klasyfikacją ciał za pomocą równoważności Witt'a. Rozprawa habilitacyjna składa się z siedmiu prac oznaczonych [E1-E3], [O1-O3] i [P1]. Paweł Gładki zainteresował się hiperciałami współpracując z Murrayem Marshall'em, promotorem jego pracy doktorskiej. Każdemu ciału  $F$  przypisane jest kwadratowe hiperciało  $Q(F)$ . Hiperciało  $Q(F)$  jest fundamentalnym obiektem tej rozprawy i główne wyniki są w większości opisane w terminach hiperciał i hiperpierścieni. Poniżej odniosę się do głównych rezultatów rozprawy.

Prace [E1-E3] dotyczą pierścieni Witt'a ciał funkcyjnych nad ciałami lokalnymi, globalnymi oraz ciałami krzywych stożkowych. Autor pokazuje, między innymi, kiedy równoważność Witt'a ciał funkcyjnych pociąga równoważność ciał współczynników. Odwrotne zagadnienie jest znacznie trudniejsze.

Jednym z istotnych wyników pracy [E1] jest to, że dwa ciała  $F, E$  są równoważne w sensie Witt'a ( $W(F) \cong W(E)$ ) wtedy i tylko wtedy gdy  $Q(F) \cong Q(E)$ . Ta równoważność uzupełnia wynik Harrisona i Cordesa. To daje też możliwość innego podejścia do zagadnienia równoważności Witt'a ciał. Równoważność Witt'a była już wcześniej rozstrzygnięta dla ciał skończonych, lokalnych i globalnych. Z tego powodu P. Gładki i M. Marshall badali równoważność Witt'a dla ciał funkcyjnych  $F$  i  $E$  nad ciałami lokalnymi i globalnymi. Prace [E1-E3] dotyczą tego zagadnienia. W szczególności praca [E1] pokazuje jakie konsekwencje ma równoważność Witt'a takich ciał w związku z ich arytmetyką i arytmetyką ich ciał współczynników  $k$  i  $l$ . Dla przykładu wniosek 2.8 pracy [E1] pokazuje, że jeśli  $W(F) \cong W(E)$  i istnieją specjalne waluacje Abyankara  $v$  w  $F$  i  $w$  w  $E$  takie, że  $k = F_v$  oraz  $l = E_w$ , to  $W(k) \cong W(l)$ . Twierdzenie 8.6 [E1] sięga głębiej. Mianowicie pokazuje ono, jak izomorfizm  $\alpha$  hiperciał  $Q(k(x_1, \dots, x_n))$  i  $Q(l(x_1, \dots, x_n))$  nad ciałami liczbowymi  $k$  i  $l$  daje nie tylko izomorfizm hiperciał  $Q(k)$  i  $Q(l)$ , ale również pokazuje, jak zachowują się za pomocą  $\alpha$  niektóre klasyczne niezmienniki związane z ciałami  $k$  i  $l$ .

Praca [E2] dotyczy ciał funkcyjnych, podobnie jak praca [E1], ale nad ciałami lokalnym. Główne wyniki tej pracy to twierdzenia 3.5 i 3.6, które są uogólnieniami wniosków 8.1 i 8.2 pracy [E1] na ciała funkcyjne nad ciałami lokalnymi.

Z kolei praca [E3] dotyczy równoważności Witt'a dla ciał krzywych stożkowych. P. Gładki przy założeniu, że ciała dwóch krzywych stożkowych nad ciałami liczbowymi i lokalnymi są równoważne w sensie Witt'a (równoważnie mają izomorficzne kwadratowe hiperciała) wyciąga wiele wniosków dotyczących relacji pomiędzy ciałami współczynników. I tak twierdzenie 10.3 w pracy [E3] jest odpowiednikiem twierdzenia 8.6 pracy [E1]. Podobnie twierdzenie 10.9 pracy [E3] jest odpowiednikiem twierdzenia 3.6 pracy [E2] i wniosku 8.2 pracy [E1].

Grupa prac [O1-O3] dotyczy praporządków i porządków w hiperciałach (multiciałach) i multipierścieniach.

W pracy [O1] Paweł Gładki pokazuje, jak podstawowe rezultaty dla porządków w ciałach i pierścieniach przenoszą się na hiperciała i multipierścienie. Twierdzenia 1, 4 i 5 pracy [O1] podają warunki równoważne (w terminach porządków i praporządków w  $H$  i  $A$ ) na to, aby hiperciało  $H$  i multipierścień  $A$  były formalnie rzeczywiste. Ponadto dają one analog słynnego Positivstellensatz. Te twierdzenia są naturalnym uogólnieniem odpowiednich rezultatów dotyczących porządków i praporządków w ciałach i pierścieniach. Problemy w dowodach tych rezultatów wynikają stąd, że oczywiste równości w arytmetyce ciał i pierścieni nie przenoszą się na ogół na hiperciała i multipierścienie.

W pracy [O2] udało się Pawłowi Gładkiemu i Murrayowi Marshallowi znacznie wzmocnić rezultaty pracy [O1] usuwając pewne silne założenia np. w twierdzeniu 5 pracy [O1] i uzyskać silniejszą postać Positivstellensatz we wniosku 7.3 pracy [O2].

Praca [O3] dotyczy uogólnionego zagadnienia selekcji pierwiastków w hiperciałach. Klasycznie, to zagadnienie dotyczące istnienia homomorfizmów  $\phi : F^{x^2} \rightarrow F^x$  postaci  $\phi(x^2) = \xi x$ , dla ustalonego pierwiastka stopnia 2 z jedynki, ma bliski związek z porządkami w ciałach i zostało w głównej mierze rozwiązane przez Waterhouse'a. Paweł Gładki zajął się uogólnionym zagadnieniem selekcji wyższych stopni dla hiperciał. Uzyskał kilka interesujących rezultatów (lemat 2.1, twierdzenia 2.1, 2.2 i 3.3) podających warunki konieczne i dostateczne, na istnienie selekcji wyższych stopni dla hiperciał.

Trzecia grupa prac składa się z tylko jednej pracy [P1]. Jak podkreśla autor, ta praca jest pierwszą z prac dotyczących przedstawialnych porządków, które w zamierzeniu autora mają prowadzić do lepszej niż aksjomatyczna teorii form kwadratowych. Jest to dość abstrakcyjne podejście do form kwadratowych i trudno na tym poziomie ocenić czy będzie prowadzić do lepszej

teorii. Jednak rezultat (twierdzenie 39 pracy [P1]) pokazujący, że dla ciała  $F$  pierścień Witt'a  $W(\mathcal{P}^*(Q(F)))$  zbioru potęgowego kwadratowego hiperciała jest izomorficzny klasycznemu pierścieniowi Witt'a  $W(F)$  ciała  $F$  daje pewną zachętę do dalszych badań w tym kierunku.

Znaczna część prac dra Pawła Gładkiego jest opublikowana w dobrych i bardzo dobrych czasopismach (Communications in Algebra, Contemporary Math. AMS, Fundamenta Mathematicae, Journal of Algebra, Journal of K-theory, Jour. of Pure and Applied Algebra, Transaction of AMS itd.) MathSciNet pokazuje, że jego prace były cytowane 27 razy przez 12 autorów. Jest też pewna liczba autocytowań. Nie jest to zbyt imponujący wynik. Niemniej jednak prace dra Gładkiego spotkały się z zainteresowaniem międzynarodowego środowiska matematycznego. Po zapoznaniu się z dokumentacją dotyczącą habilitacji uważam, że rezultaty przedstawione przez dra Pawła Gładkiego w rozprawie habilitacyjnej są wartościowe i pokazują, że autor jest doświadczonym badaczem, podejmującym kolejne wyzwania do rozwiązywania nowych problemów badawczych. Rozprawa habilitacyjna dra Pawła Gładkiego, jak i całokształt jego działalności naukowej spełnia wymagania potrzebne do uzyskania stopnia dra habilitowanego. Wnoszę o nadanie stopnia dra habilitowanego drowi Pawłowi Gładkiemu.

Grzegorz Banaszak

