Autoreferat

AUTOR PAWEŁ GŁADKI

1. Imię i nazwisko: Paweł Gładki.

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

a) doktor matematyki, 15 września 2007, Department of Mathematics and Statistics, University of Saskatchewan, Saskatoon, Kanada. Tytuł pracy doktorskiej: *The pp Conjecture in the Theory of Spaces of Orderings*. Promotor: prof. Murray Marshall.

b) magister matematyki, 2 czerwca 2002, Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski, Katowice, Polska. Tytuł pracy magisterskiej: *Hipoteza Riemanna dla ciał funkcji algebraicznych*. Promotor: prof. dr hab. Kazimierz Szymiczek.

3. Dotychczasowe zatrudnienie:

A) Stałe:

a) Katedra Informatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków, Polska; adiunkt, 50% etatu; 1.X.2010 – obecnie.

b) Instytut Matematyki, Uniwersytet Śląski, Katowice, Polska; adiunkt, 100% etatu; 1.X.2009 – obecnie.

B) Wizytujące:

a) Department of Mathematics and Statistics, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada; Visiting Assistant Professor; 1.IX.2014 – 31.XII.2014.

b) Centre International de Rencontres Mathématiques, Luminy, France; Research in Pairs Scholar; 12.XI.2012 – 25.XI.2012.

c) Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach, Germany; Research in Pairs Scholar; 30.X.2011 – 13.XI.2011.

d) Laboratoire de Mathématiques, Université Savoie Mont Blanc, Chambéry, France; Visiting Scholar; 1.IX.2011 – 30.IX.2011.

e) Department of Mathematics and Statistics, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada; Visiting Assistant Professor; 1.VII.2010 – 30.IX.2010.

f) Department of Mathematics and Statistics, University of California Santa Barbara, Santa Barbara, USA; Visiting Assistant Professor; 1.X.2007 – 30.IX.2009.

g) Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, Canada; Stipendee; 1.I.2007 – 30.IV.2007.

4. **Osiągnięcie wynikające z art.16 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016r. poz. 882zezm. wDz. U. z2016r. poz. 1311):**

Przedmiotowe osiągnięcie składa się z cyklu siedmiu prac zatytułowanych:

Wybrane zastosowania hiperalgebr w algebraicznej teorii form kwadratowych.

4a. Lista prac wchodzących w skład ww. osiągnięcia:

[E1]. P. Gładki, M. Marshall, *Witt equivalence of function fields over global fields,* Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), 7861 – 7881.

[E2]. P. Gładki, M. Marshall, *Witt equivalence of function fields of curves over local fields,* Comm. Algebra **45** (2017), 5002 – 5013.

[E3]. P. Gładki, *Witt equivalence of fields: a survey with a special emphasis on applications of hyperfields* in: *Ordered Algebraic Structures and Related Topics,* 169 – 185, Contemp. Math. **697**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

[O1]. P. Gładki, *Orderings of higher level in multifields and multirings*, Ann. Math. Silesianae **24** (2010), 15 – 25.

[O2]. P. Gładki, M. Marshall, *Orderings and signatures of higher level on multirings and hyperfields*, J. K-theory **10** (2012), 489 – 518.

[O3]. P. Gładki, *Root selections and 2^p-th root selections in hyperfields*, Discuss. Math., Gen. Algebra Appl., accepted.

[P1]. P. Gładki, K. Worytkiewicz, *Witt rings of quadratically presentable fields,* Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl., accepted.

4b. Opis cyklu prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego:

Spis treści

1 Wstęp i opis dziedziny.

Formy kwadratowe stanowią obszerną dziedzinę badań o korzeniach w klasycznej matematyce i prawdziwie spektakularnych osiągnięciach w ostatnich dekadach. Jej początki sięgają czasów Eulera i Fermata, zaś już w czasach Gaussa istniała dobrze rozwinięta teoria form o współczynnikach całkowitych. Nowym impulsem w rozwoju teorii było ogłoszenie na początku XX wieku podczas Kongresu Matematyków w Paryżu słynnych 11 i 17 problemów Hilberta, których kompletne rozwiązanie pojawiło się w latach dwudziestych w pracach Hassego, Artina i Schreiera. Współczesna teoria bierze swój początek w pionierskich pracach Witta [63], który wprowadził pojęcie pierścienia nazywanego dziś jego nazwiskiem, oraz w pracach Pfistera [49] i Casselsa [10], którzy zbadali i opisali podstawowe własności pierścieni Witta: mówiąc kolokwialnie, pierścień Witta zawiera informację o teorii symetrycznych form dwulinowych nad danym ciałem i tym samym opisuje zachowanie geometrii ortogonalnej budowanej nad takim ciałem.

Głównym narzędziem używamym do studiowania form kwadratowych w niniejszym autoreferacie są hiperciała, czyli algebry przypominające ciała, wszelako z dodawaniem przyjmującym możliwie wiele wartości: precyzyjne definicje zostaną podane poniżej. Trudno jest powiedzieć kto pierwszy formalnie wprowadził hiperciała do matematyki, ale przynajmniej w zakresie używanym przez nas wydaje się, że po raz pierwszy pojawiły się w 1956 w pracach Krasnera [34] dotyczących aproksymacji ciał z waluacjami. W kolejnych dekadach struktury z wielowartościowym dodawaniem badane były przede wszystkim przez informatyków, zapewne ze względu na ich zastosowania w logice rozmytej, teorii automatów, kryptografii, teorii kodów i hipergrafów (zob. [16], [17] oraz [64]), a także, do pewnego stopnia, przez matematyków zajmujących się analizą harmoniczną (zob. [38]). W ostatnich czasach możemy mówić o małym renesansie hiperstruktur w związku z ich rosnącą popularnością w różnych dyscyplinach matematyki: w pracach Connesa i Consani [11], [12], [13] dotyczących teorii liczb, geometrii incydencji oraz geometrii algebraicznej uprawianej nad ciałami o charakterystyce 1, w pracach Viro [60], [59] dotyczących geometrii tropikalnej, w prcach Izhakian i Rowena [25] oraz Izhakiana, Knebuscha i Rowena [24] dotyczących badań niedawno wprowadzonych obiektów algebraicznych takich jak algebry supertropikalne, czy w pracach Lorscheida [39], [40] poświęconych tzw. odbitkom, czyli obiektom algebraicznym skonstruowanym na potrzeby stworzenia rygorystycznych podstaw algebraicznych geometrii tropikalnej. Wreszcie Jun zastosował hiperstruktury do uogólnienia pojęcia waluacji i rozwinął podstawy geometrii algebraicznej uprawianej nad hiperpierścieniami [27], [28], [29].

Bardzo naturalne przykłady hiperciał pojawiają się też w algebraicznej teorii form kwadratowych. Fakt ten został zaobserwowany po raz pierwszy przez Marshalla [43], a jego praca, wraz z zawartymi w niej otwartymi problemami, zainspirowała autora do zainteresowania się tematyką hiperciał i stanowiła pokaźną część motywacji stojącej za pracami opisywanymi w niniejszym opracowaniu. Siedem prac stanowiących cykl tematyczny autoeferatu autora ilustruje przykłady trzech zastosowań hiperciał w algebraicznej teorii for kwadratowych: prace **[E1]**, **[E2]** i **[E3]** dotyczą równoważności Witta ciał, prace **[O1]**, **[O2]** i **[O3]** dotyczą teorii porządków wyższych rzędów i związanych z nimi pojęć rozwiniętej dla hiperciał i multipierścieni, zaś praca **[P1]** dotyczy aksjomatycznej teorii form kwadratowych. Poniżej zajmiemy się szczegółowym wyjaśnieniem wzmiankowanych przed chwilą pojęć.

Niech F będzie ciałem charakterystyki $\neq 2$ i niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad F. *Formą kwadratową* q na V nazywamy funkcję $q\colon V \to F$ taką, że stowarzyszona z nią funkcja $b_q\colon V \times V \to F$ zdefinowana wzorem

$$b_q(u,v) = \frac{1}{2}[q(u+v) - q(u) - q(v)]$$

jest *dwuliniowa*, czyli liniowa ze względu na każdą zmienną, oraz taką, że

$$q(av) = a^2 q(v),$$

dla wszelkich $a \in F$, $v \in V$. Parę (V, q) będziemy nazywać *przestrzenią kwadratową*, zaś parę (V, b_q) *przestrzenią dwuliniową*. Dwa wektory $u, v \in V$ są *ortogonalne* jeśli $b_q(u, v) = 0$.

Dwie przestrzenie kwadratowe (V_1, q_1) i (V_2, q_2) nad tym samym ciałem F są *izometryczne*, jeżeli istnieje izomorfizm przestrzeni wektorowych $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ taki, że

$$q_2(\phi(v)) = q_1(v),$$

dla dowolnych $v \in V_1$, zaś dwie formy kwadratow q_1 i q_2 będziemy wówczas nazywać *równoważnymi* i oznaczać $q_1 \cong q_2$. Dla formy kwadratowej q na V elementy zbioru $D_F(q)$ niezerowych wartości q:

$$D_F(q) = \{a \in F^\times \mid \exists v \in V\, [a = q(v)]\}$$

będziemy nazywać elementami *reprezentowanymi* przez q nad F. Jako że $q(a v) = a^2 q(v)$, dla $a \in F$, $v \in V$, wynika stąd, iż $D_F(q)$ składa się z warstw multyplikatywnej grupy $F^\times$ względem jej podgrupy $F^{\times 2}$ niezerowych kwadratów. Tym samym $D_F(q)$ można postrzegać jako podzbiór grupy $F^\times / F^{\times 2}$ klas kwadratów ciała F.

Dla przestrzeni kwadratowej (V, q) wymiar V będziemy nazywać *wyiarem* q i oznaczać $\dim q$. Jeśli $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ jest bazą V, macierz $B = [b_q(u_i, u_j)] \in F_n^n$ będziemy nazywać *macierzą* q względem bazy $\mathcal{B}$. Jeśli B_1 i B_2 są dwiema macierzami q względem różnych baz $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, to B_1 i B_2 są *kongruentne*, tzn. $B_1 = P B_2 P^T$, gdzie P jest pewną nieosobliwą macierzą – tym samym $\det B_1$ i $\det B_2$, o ile są różne od zera, leżą w tej samej warstwie $(\det B) F^{\times 2}$, którą będziemy nazywać *wyznacznikiem* q i oznaczać $\det q$. Jeżeli $\det B = 0$ dla pewnej bazy $\mathcal{B}$, to przyjmujemy, że $\det q$ jest równy 0. Formę q nazywamy *nieosobliwą,* jeżeli $\det q \neq 0$.

Dla każdej formy kwadratowej q nad ciałem F, $\operatorname{char} F \neq 2$, istnieje baza $\mathcal{B}$ taka, że macierz B formy q względem $\mathcal{B}$ jest diagonalna, a zatem q może być *diagonalizowana*. Taka baza $\mathcal{B}$ składa się z wektorów, które są parami ortogonalne. Można łatwo sprawdzić, że jeżeli $v = (x_1, \ldots, x_n)$ jest wektorem o współrzędnych zapisanych względem bazy $\mathcal{B}$, i jeśli $a_1, \ldots, a_n$ są elementami na głównej przekątnej macierzy B formy q względem $\mathcal{B}$, to wówczas

$$q(v) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2.$$

Jeżeli q' jest formą kwadratową równoważną q, $q' \cong q$, oraz jeśli q' jest diagonalizowana tak, że $a_1', \ldots, a_n'$ są elementami na głównej przekątnej macierzy B' formy q' względem pewnej bazy $\mathcal{B}'$, to, wobec równości $B = P B' P^T$, dla pewnej macierzy $P \in F_n^n$, $\det P \neq 0$, łatwo sprawdzamy, iż a_i oraz a_i' leżą w tej samej warstwie względem podgrupy $F^{\times 2}$. Z tych względów będziemy utożsamiali formę q (lub, ściślej, klasę form równoważnych formie q) z formalną n-ką $\langle \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \rangle$, gdzie $\overline{a}_i = a_i F^{\times 2}$.

Rozważmy binarną formę kwadratową $q = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle$. W świetle naszych powyższych rozważań

$$D_F(q) = \{\overline{a} \in F^\times / F^{\times 2} \mid \exists x_1, x_2 \in F\, [a = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2]\},$$

co sugeruje, że multyplikatywna grupa $F^\times / F^{\times 2}$ może być wyposażona w pewną wielowartościową strukturę addytywną blisko związaną z teorią form kwadratowych. Jest tak w istocie: jeżeli $\operatorname{char} F \neq 2$ oraz $F \neq \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$, definiujemy dodawanie

$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 = D_F(\langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle),$$

dla wszelkich $\overline{a}_1, \overline{a}_2 \in F^\times / F^{\times 2}$, zaś jeśli $\operatorname{char} F = 2$ lub $F = \mathbb{F}_3$ or $\mathbb{F}_5$, stosujemy nieco zmodyfikowaną definicję:

$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 = \begin{cases} D_F(\langle \overline{a}_1, \overline{a}_2 \rangle) \cup \{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}, & \text{gdy } \overline{a}_1 \neq -\overline{a}_2, \\ F^\times / F^{\times 2}, & \text{gdy } \overline{a}_1 = -\overline{a}_2, \end{cases}$$

dla wszelkich $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2 \in F^\times / F^{\times 2}$. Oznaczmy przez $Q(F)$ grupę $F^\times / F^{\times 2}$ wraz z dołączonym elementem $\overline{0}$, wielowartościowym dodawanie + zdefiniowanym jak wyżej dla niezerowych klas $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2 \in F^\times / F^{\times 2}$ i naturalnie rozszerzoną na $\overline{0}$ przez zadeklarowanie $\overline{0}+\overline{a}=\overline{a}$ i zwykłym mnożeniem $\cdot$ naturalnie rozszerzonym na $\overline{0}$ przez $\overline{a}\cdot\overline{0}=\overline{0}\cdot\overline{a}=\overline{0}$. Nietrudno sprawdzamy (**[E1]**, Proposition 2.1) że $Q(F)$ wraz z tak zdefiniowanymi operacjami ma następujące własności:

(QH1). $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$, dla wszelkich $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in Q(F)$;

(QH2). $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$, dla wszelkich $\overline{a},\overline{b}\in Q(F)$;

(QH3). $(\overline{a}\in\overline{b}+\overline{c})\Rightarrow(\overline{b}\in\overline{a}+(-\overline{c}))$, dla wszelkich $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in Q(F)$;

(QH4). $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$, dla wszelkich $\overline{a}\in Q(F)$;

(QH5). $(Q(F)\setminus\{\overline{0}\},\cdot,\overline{1})$ jest przemiennym monoidem;

(QH6). $\overline{a}\cdot\overline{0}=\overline{0}$, dla wszelkich $\overline{a}\in Q(F)$;

(QH7). $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})\subseteq\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{b}$, dla wszelkich $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in Q(F)$;

(QH8). $\overline{1}\neq\overline{0}$;

(QH9). każdy $\neq\overline{0}$ element $Q(F)$ ma multyplikatywną odwrotność.

$Q(F)$ nazywamy *kwadratowym hiperciałem* ciała F. Jak sama nazwa sugeruje, jest to szczególny przykład *hiperciała*, czyli algebry w wielowartościowym dodawaniem $(H,+,-,\cdot,0,1)$, gdzie $H\neq\emptyset$, $0,1\in H$ i $+\colon H\times H\to 2^H$, $-\colon H\to H$, $\cdot\colon H\times H\to H$ są funkcjami takimi, że

(H1). $\forall a,b,c\in H\,[(a+b)+c=a+(b+c)]$;

(H2). $\forall a,b\in H\,[a+b=b+a]$;

(H3). $\forall a,b,c\in H\,[(a\in b+c)\Rightarrow(b\in a+(-c))]$;

(H4). $\forall a\in H\,[a+0=a]$;

(H5). $(H\setminus\{0\},\cdot,1)$ jest przemiennym monoidem;

(H6). $\forall a\in H\,[a\cdot 0=0]$;

(H7). $\forall a,b,c\in H\,[a(b+c)\subseteq ab+ac]$;

(H8). $0\neq 1$;

(H9). $\forall a\in H\setminus\{0\}\exists a^{-1}\in H\,[a\cdot a^{-1}=1]$.

Zauważmy, że $a+(b+c)=\bigcup_{x\in b+c}a+x$. Tak jak w przypadku zwykłych ciał, będziemy pisać $H^\times$ dla oznaczenia $H\setminus\{0\}$. Zgodnie z terminologią z pracy [45], algebra $(H,+,-,0)$ spełniająca aksjomaty **(H1)** – **(H4)** będzie nazywana (kanoniczną) *hipergrupą*, algebra $(H,\ +,\ -,\ \cdot,\ 0,\ 1)$ spełniająca **(H1)** – **(H8)** *multipierścieniem*, zaś algebra $(H,+,-,\cdot,0,1)$ spełniająca **(H1)** – **(H6)**, **(H8)** i dodatkowo

(H7'). $\forall a,b,c\in H\,[a(b+c)=ab+ac]$

hiperpierścieniem. Zauważmy, że wobec **(H7)** i **(H9)**, każde hiperciało spełnia aksjomat **(H7')**.

Hiperciała tworzą kategorię, w której morfizmy pomiędzy dwoma hiperciałami H_1 i H_2 definiujemy jako funkcje $f\colon H_1\to H_2$ takie, że

(M1). $\forall a,b\in H_1\,[f(a+b)\subseteq f(a)+f(b)]$,

(M2). $\forall a,b\in H_1\,[f(ab)=f(a)f(b)]$,

(M3). $\forall a\in H_1\,[f(-a)=-f(a)]$,

(M4). $f(0) = 0$,

(M5). $f(1) = 1$.

Hiperciała, jakkolwiek na pierwszy rzut oka sprawiające wrażenie tworów dość egzotycznych, są w rzeczywistości bardzo naturalnymi obiektami, które pojawiają się już na etapie szkolnej matematyki: istotnie, rozważmy hiperciało $Q_2 = \{-1, 0, 1\}$ ze zwykłym mnożeniem, w którym 0 jest elementem neutralnym przemiennego dodawania zdefiniowanego następująco:

$$1 + 1 = \{1\}, \quad (-1) + (-1) = \{-1\}, \quad 1 + (-1) = \{-1, 0, -1\};$$

zauważmy, że "1" możemy tu interpretować jako dodatnie liczby rzeczywiste, "-1" jako liczby ujemne, zaś "0" jako liczbę 0 – tym samym wielowartościowe dodawanie + określa możliwy rezultat dodawania dwóch liczb rzeczywistych o potencjalnie różnych znakach.

Po zapoznaniu się z powyższymi definicjami i uwagami, możemy teraz przystąpić do omówienia głównych rezultatów praz zawartych w cyklu monotematycznym niniejszego autoreferatu.

2 Hiperciała i równoważność Witta ciał

Jeżeli (V_1, q_1) i (V_2, q_2) są dwiema przestrzeniami kwadratowymi, to wówczas $(V_1 \oplus V_2, q_1 \perp q_2)$, gdzie

$$(q_1 \perp q_2)(v_1, v_2) = q_1(v_1) + q_2(v_2),$$

również jest przestrzenią kwadratową, którą nazywamy *sumą ortogonalną* form q_1 i q_2. Podobnie $(V_1 \otimes V_2, q)$ jest przestrzenią kwadratową zwaną *iloczynem tensorowym* form q_1 i q_2, oznaczaną przez $q_1 \otimes q_2$, przy czym stowarzyszona forma dwuliniowa b_q jest określona wzorem

$$b_q(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) = b_{q_1}(v_1, w_1) \cdot b_{q_2}(v_2, w_2),$$

na tensorach prostych $v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2 \in V_1 \otimes V_2$. Jeśli $q_1 = \langle \overline{a}_1, ..., \overline{a}_n \rangle$ i $q_2 = \langle \overline{b}_1, ..., \overline{b}_m \rangle$ są formami diagonalizowanymi, to

$$q_1 \perp q_2 = \langle \overline{a}_1, ..., \overline{a}_n, \overline{b}_1, ..., \overline{b}_m \rangle \text{ oraz } q_1 \otimes q_2 = \langle \overline{a}_1\overline{b}_1, ..., \overline{a}_1\overline{b}_m, ..., \overline{a}_n\overline{b}_1, ..., \overline{a}_n\overline{b}_m \rangle.$$

Suma ortogonalna i iloczyn tensorowy nieosobliwych form kwadratowych są nieosobliwe. Formę q nazywamy *izotropową*, jeżeli, dla pewnego niezerowego wektora $v \in V$, $q(v) = 0$. Prostym, a zarazem ważnym przykładem nieosobliwej formy izotropowej jest *płaszczyzna hiperboliczna*, czyli dwuwymiarowa forma, której diagonalizacja równa jest $\langle \overline{1}, -\overline{1} \rangle$. Jeżeli forma q jest izotropowa, to wówczas istnieją pewna forma kwadratowa q_1 i płaszczyzna hiperboliczna h_1 takie, że $q \cong h_1 \perp q_1$; postępując indukcyjnie otrzymujemy zatem rozkład

$$q \cong h_1 \perp ... \perp h_i \perp q_a,$$

gdzie h_1, ..., h_i są płaszczyznami hiperbolicznymi, zaś forma q_a jest *anizotropowa*, tzn. nie jest izotropowa. Okazuje się, że liczba i w powyższym rozkładzie jest wyznaczona jednoznacznie, zaś forma q_a jednoznacznie z dokładnością do izometrii – nazywamy ją *anizotropową częścią* formy q. Jeżeli $q_a = 0$, to formę q nazywamy *hiperboliczną*.

Dwie formy kwadratowe q i q' są *równoważne w sensie Witta*, co oznaczamy przez $q \sim q'$, jeżeli ich anizotropowe części q_a i q'_a są izometryczne, $q_a \cong q'_a$. Zgodnie z oczekiwaniami, równoważność w sensie Witta jest istotnie relacją równoważności, która okazuje się zachowywać sumy ortogonalne i iloczyny tensorowe, tzn. jeśli $q \sim q'$ i $r \sim r'$, to wówczas

$$q \perp r \sim q' \perp r' \text{ oraz } q \otimes r \sim q' \otimes r'.$$

Jeżeli $\operatorname{char} F \neq 2$, to klasy równoważności w sensie Witta nieosobliwych form kwadratowych nad F wraz z dodawaniem i mnożeniem indukowanymi przez $\perp$ i $\otimes$ tworzą pierścień przemienny z jedynką, który nazywamy *pierścieniem Witta* ciała F i oznaczamy przez $W(F)$. Jeśli $\operatorname{char} F = 2$, to podobna konstrukcja prowadzi do pojęcia *pierścienia Witta nieosobliwych i symetrycznych form dwuliniowych* nad ciałem F, również oznaczanego przez $W(F)$. W tym przypadku klasy równoważności Witta nieosobliwych form kwadratowych nie tworzą struktury pierścienia, ale jedynie grupę abelową, zwyczajowo oznaczaną przez $W_q(F)$, która okazuje się być $W(F)$-modułem [6].

Forma kwadratowa $\langle \overline{1}, \overline{a} \rangle$, $\overline{a} \in F^{\times} / F^{\times 2}$, nazywana jest *jednokrotną formą Pfistera*, zaś iloczyn tensorowy n jednokrotnych form Pfistera $\langle \overline{1}, \overline{a}_1 \rangle \otimes \ldots \otimes \langle \overline{1}, \overline{a}_n \rangle$, $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \in F^{\times} / F^{\times 2}$, nazywany jest *$n$-krotną formą Pfistera*. Grupa abelowa $I(F)$ generowana przez klasy równoważności Witta jednokrotnych form Pfistera tworzy ideał pierścienia $W(F)$, zwany *ideałem fundamentalnym*. Dla ideału $I(F)$ jego n-krotna potęga $I^n(F)$ jest generowana jako grupa abelowa przez klasy równoważności Witta n-krotnych form Pfistera.

Mówimy, że dwa ciała F i E są *równoważne w sensie Witta*, co oznaczamy przez $F \sim E$, jeżeli $W(F)$ i $W(E)$ są izomorficzne jako pierścienie. Wyjaśnijmy bardziej szczegółowo jakie są konsekwencje równoważności Witta ciał. Po pierwsze, sytuacja, w której formy kwadratowe nad dwoma różnymi ciałami zachowują się w dokładnie taki sam sposób jest opisana następującą definicją:

Definicja 2.1. *Dwa ciała F i E of charakterystyki $\neq 2$ nazywamy* równoważnymi ze względu na formy kwadratowe *jeżeli istnieje para bijekcji $t: F^{\times} / F^{\times 2} \to E^{\times} / E^{\times 2}$ i $T: \mathfrak{C}(F) \to \mathfrak{C}(E)$, gdzie $\mathfrak{C}(F)$ i $\mathfrak{C}(E)$ oznaczają zbiory klas równoważności nieosobliwych form kwadratowych nad, odpowiednio, F i E, takie, że spełnione są następujące cztery warunki:*

i. $T(\langle \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \rangle) = \langle t(\overline{a}_1), \ldots, t(\overline{a}_n) \rangle$, *dla wszelkch* $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \in F^{\times} / F^{\times 2}$,

ii. $\det T(q) = t(\det q)$, *dla każdej nieosobliwej formy kwadratowej q nad F,*

iii. $D_E(T(q)) = t(D_F(q))$, *dla każdej nieosobliwej formy kwadratowej q nad F,*

iv. $t(\overline{1}) = \overline{1}$ *oraz* $t(-\overline{1}) = -\overline{1}$.

Klasyczne kryterium równoważności Witta pochodzące od Harrisona [23] razem z twierdzeniem Cordesa [14] orzeka co następuje:

Twierdzenie 2.2. *Dla dwóch ciał F i E charakterystyki $\neq 2$ następujące warunki są równoważne:*

1. *F i E są równoważne ze względu na formy kwadratowe,*

2. *istnieje izomorfizm grup t: $F^{\times} / F^{\times 2} \to E^{\times} / E^{\times 2}$ taki, że $t(\overline{1}) = \overline{1}$, oraz, dla wszelkich $\overline{a}$, $\overline{b} \in F^{\times} / F^{\times 2}$,*

$$\overline{1} \in D_F(\overline{a}, \overline{b}) \Leftrightarrow \overline{1} \in D_E(t(\overline{a}), t(\overline{b})),$$

3. $F \sim E$,

4. $W(F) / I^3(F) \cong W(E) / I^3(E)$.

Wersja powyższego kryterium dla ciał charakterystyki 2 pochodzi od Baezy i Moresiego [6], gdzie główny argument zasadza się na obserwacji, iż tzw. Arason-Pfister Hauptsatz [2] zachodzi dla ciał dowolnej charakterystyki.

Z powyższego twierdzenia wynika, że równoważne w sensie Witta ciała można rozumieć jako ciała, których teorie form kwadratowych są takie same. Zauważmy wszelako, iż w świetle tego, czego powyżej dowiedzieliśmy się o kwadratowych hiperciałach i morfizmach hiperciał, możemy sformułować kryterium Harrisona-Cordesa używając znacznie prostszego języka (**[E1]**, Proposition 3.2):

Twierdzenie 2.3. *Niech F i E będą dowolnymi ciałami. Wówczas $F \sim E$ wtedy i tylko wtedy, gdy kwadratowe hiperciała $Q(F)$ i $Q(E)$ są izomorficzne jako hiperciała.*

Tym samym kwadratowe hiperciało $Q(F)$ zawiera tę samą informację o ciele F co jego pierścień Witta $W(F)$. Jednocześnie wydaje się być o wiele prostszym do zrozumienia obiektem.

Zagadnienie badania które ciała są równoważne w sensie Witta okazuje się być dość skomplikowane i możliwe do rozstrzygnięcia tylko przy zwężeniu klasy rozważanych ciał do specyficznych przypadków, w istocie zaś satysfakcjonujące wyniki zostały dotychczas osiągnięte tylko w kilku, raczej szczególnych, przypadkach. Trywialnymi przykładami ciał równoważnych w sensie Witta są ciała kwadratowo domknięte, które wszystkie są równoważne, przy czym ich pierścieniem Witta jest poprostu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, oraz ciała rzeczywiście domknięte, których pierścieniem Witta okazuje się być $\mathbb{Z}$. Nieco bardziej skomplikowany, aczkolwiek wciąż możliwy do rozstrzygnięcia elementarnymi metodami, jest przypadek ciał skończonych, które albo są równoważne w sensie Witta z $\mathbb{F}_3$, o ile liczba ich elementów $\equiv 3 \bmod 4$, albo z $\mathbb{F}_5$, o ile liczba ich elementów $\equiv 1 \bmod 4$ (zob., na przykład, **[E3]**, Theorem 4.3). Ciała lokalne również są kompletnie sklasyfikowane ze względu na równoważność w sensie Witta (zob. **[E3]**, Theorem 6.1, gdzie znajduje się prosty dowód w przypadku niedyadycznym oraz [37], Theorem VI.2.29, dla przypadku dyadycznego), przy czym metody zaangażowane w dowodach zasadniczo nie przekraczają zakresu standardowych podręczników algebry dla doktorantów. Przypadek ciał globalnych jest znacznie bardziej skomplikowany. Jako że uzupełnienia ciał globalnych są ciałami lokalnymi, równoważność Witta uzupełnień ciał globalnych jest łatwa do opisania. Problem równoważności w sensie Witta ciał globalnych został kompletnie rozstrzygnięty przez spektakularną zasadę lokalno-globalną, której trzy różne dowody podali Perlis, Szymiczek, Conner, Litherland [48] oraz Szymiczek [56], [57] i która orzeka, iż dwa ciała globalne o charakterystyce $\neq 2$ są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie ich odpowiadające sobie uzupełnienia są równoważne w sensie Witta. Baeza i Moresi [6] pokazali ponadto, że każde dwa ciała globalne charakterystyki 2 są równoważne, nie jest też trudno udowodnić, że ciało globalne charakterystyki 2 nie może być równoważne ciału globalnemu charakterystyki $\neq 2$. Szczegółowa analiza wzmiankowanej zasady lokalno-globalnej pozwala też na sporządzenie kompletnej listy niezmienników równoważności Witta ciał liczbowych, co zostało zrobione przez Carpenter [8]. Biorąc pod uwagę, że ciała globane są bądź ciałami liczbowymi, bądź ciałami funkcyjnymi jednej zmiennej nad ciałami skończonymi, w ostatnich latach znaczny wysiłek matematyków pracujących z formami kwadratowymi został poświęcony próbom przeniesienia metod stosowanych dla ciał globalnych na grunt dowolnych ciał funkcyjnych. Przypadek ciał funkcyjnych jednej zmiennej nad ciałami algebraicznie domkniętymi jest raczej prosty (por., na przykład, **[E3]**, Theorem 9.1), zaś przypadek ciał funkcji algebraicznych jednej zmiennej nad ciałami rzeczywiście domkniętymi został stosunkowo niedawno rozstrzygnięty przez Koprowskiego [33] oraz Grenier-Boley wraz z Hoffmannem [22]. Częściowo pod wpływem motywacji zdobytej podczas recenzowania pracy [22] dla Zentralblatt, autor wspólnie z Murrayem Marshallem podjął się próby zbadania kryteriów równoważności Witta ciał funkcyjnych nad ciałami globalnymi i lokalnymi. W rezultacie powstały dotychczas trzy prace **[E1]**, **[E2]** i **[E3]** (niestety, opublikowane już po śmierci drugiego autora w 2015), których opisem się teraz zajmiemy.

2.1 Praca [E1].

Jest to praca otwierająca serię poświęconą równoważności Witta, która zawiera większość teorii i rozwiniętych technik, z tego też powodu omówimy ją możliwie najbardziej szczegółowo. Dla ciała F przyjmujemy standardową notację z teorii waluacji: jeśli v jest waluacją na F, Γ_v oznaczać będzie grupę wartości v, A_v pierścień waluacyjny, M_v jego jedyny ideał maksymalny, U_v grupę jednostek, F_v ciało reszt, a $\pi = \pi_v \colon A_v \to F_v$ kanoniczny homomorfizm określony wzorem $\pi(a) = a + M_v$. Powiemy, że v ma rangę dyskretną równa 1, jeżeli $\Gamma_v \cong \mathbb{Z}$.

Dalej, przypomnijmy, że *porządkiem* ciała F nazywamy podzbiór P zbioru $F^\times$ taki, że $F^\times = P \dot{\cup} -P$ (suma rozłączna), $P \cdot P \subseteq P$, $P + P \subseteq P$, gdzie $-P = \{-a | a \in P\}$. Jeśli P jest porządkiem F to $F^{\times 2} \subseteq P$ i P jest podgrupą $F^\times$. Porządki ciała F o charakterystyce char $F = 0$ są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z homomorfizmami hiperciał $Q(F) \to Q_2$ (przypomnijmy, że Q_2 oznacza tu trzyelementowe hiperciało zdefiniowane wcześniej), tak więc porządki dwóch równoważnych w sensie Witta ciał również pozostają we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości (zob. **[E3]**, Theorem 7.1, gdzie znajduje się prosty dowód tego ogólnie znanego faktu).

Niestety, podobna odpowiedniość nie zachodzi dla waluacji: jakkolwiek jest prawdziwa dla pewnych szczególnych klas ciał, w tym ciał globalnych o charakterystyce $\neq 2$, można stosunkowo łatwo podać odnośne kontrprzykłady w ogólnym przypadku (zob., na przykład, **[E3]**, Example 7.3). Głównym rezultatem pracy **[E1]** jest rozszerzenie zasady lokalno-globalnej Perlisa, Szymiczka, Connera i Litherlanda (por. **[E1]**, Theorem 7.5) orzekające, że jeśli ciała funkcyjne F i E nad ciałami globalnymi są równoważne w sensie Witta, to ustanawiający taką równoważność izomorfizm hiperciał kwadratowych $Q(F)$ i $Q(E)$ indukuje w sposób kanoniczny bijekcję pomiędzy zbiorami waluacji Abhyankara ciał F i E, których ciała reszt nie są ani skończone, ani charakterystyki 2. Przypomnijmy, że jeżeli F jest ciałem funkcyjnym nad ciałem k i v jest waluacją w F, to nierówność Abhyankara orzeka, iż

$$\operatorname{trdeg}(F\colon k) \geq \operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}(\Gamma_v / \Gamma_{v|k}) + \operatorname{trdeg}(F_v\colon k_{v|k})$$

gdzie $v|k$ oznacza zwężenie waluacji v do k. Dla dowolnej grupy abelowej Γ, $\operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}(\Gamma) := \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. Mówimy, że v jest *waluacją Abhyankara* (względem k) jeśli zamiast $\geq$ w nierówności Abhyankara występuje znak $=$. Jest dobrze znanym faktem, że w tym przypadku $\Gamma_v / \Gamma_{v|k} \cong \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$ (gdzie w produkcie występuje $\operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}(\Gamma_v / \Gamma_{v|k})$ czynników) oraz F_v jest ciałem funkcyjnym nad $k_{v|k}$. Ponadto, jeżeli v jest waluacją Abhyankara (względem k) to $\Gamma_v \cong \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$ (gdzie w iloczynie występuje $\operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}(\Gamma_v)$ czynników) oraz F_v jest ciałem funkcyjnym nad ciałem globalnym albo ciałem skończonym.

Precyzyjna wypowiedź **[E1]**, Theorem 7.5, w szczególności zaś precyzyjny opis sposobu budowania wzmiankowanej kanonicznej bijekcji wymagałby wprowadzenia szeregu technicznych definicji i oznaczeń, które zapewne przekroczyłoby pożądany poziom ogólności rozważań w niniejszym autoreferacie, są one wszelako detalicznie dyskutowane w **[E1]**. Głównym narzędziem w przeprowadzonym dowodzie jest kombinacja **[E1]**, Propositions 4.1 – 4.3, które są odpowiednio zbudowanymi uogólnieniami do przypadku hiperciał klasycznego twierdzenia Springera [53], oraz **[E1]**, Proposition 4.6, która, z kolei, jest delikatnie zaprojektowaną generalizacją metody konstruowania waluacji w oparciu o pewne podgrupy multyplikatywnej grupy ciała pochodzącą od Arasona, Elmana i Jacoba ([1], Theorem 2.16).

Jakkolwiek na pierwszy rzut oka **[E1]**, Theorem 7.5 może sprawiać wrażenie rezultatu raczej słabego, dostarcza bowiem jedynie warunku koniecznego zachodzenia równoważności w sensie Witta, okazuje się wszelako twierdzeniem zaskakująco użytecznym ze względu na swoje zastosowania. Dla ciała F zdefiniujmy *nominalny stopień przestępny* F wzorem

$$\operatorname{ntd}(F) = \begin{cases} \operatorname{trdeg}(F\colon \mathbb{Q}), & \text{gdy char } F = 0, \\ \operatorname{trdeg}(F\colon \mathbb{F}_p) - 1, & \text{gdy char } F = p. \end{cases}$$

Niech F będzie ciałem funkcyjnym n zmiennych nad ciałem globalnym. Dla $0 \leq i \leq n$ oznaczmy przez $\nu_{F,i}$ zbiór waluacji Abhyankara v ciała F takich, że $\operatorname{ntd}(F_v) = i$. Zauważmy, że

$$\nu_{F,i} = \nu_{F,i,0} \dot{\cup} \nu_{F,i,1} \dot{\cup} \nu_{F,i,2},$$

gdzie

1. $\nu_{F,i,0}$ jest podzbiorem waluacji ze zbioru $\nu_{F,i}$ takich, że char $F_v = 0$,

2. $\nu_{F,i,1}$ jest podzbiorem waluacji ze zbioru $\nu_{F,i}$ takich, że char $F_v \neq 0, 2$,

3. $\nu_{F,i,0}$ jest podzbiorem waluacji ze zbioru of $\nu_{F,i}$ takich, że $\operatorname{char} F_v = 2$.

Oczywiście niektóre ze zbiorów $\nu_{F,i,j}$ mogą być puste. Dokładniej, jeśli $\operatorname{char}(F) = p$ dla pewnej nieparzystej liczby pierwszej p, to $\nu_{F,i,j} = \emptyset$ dla $j \in \{0, 2\}$, a jeśli $\operatorname{char}(F) = 2$ to $\nu_{F,i,j} = \emptyset$ dla $j \in \{0, 1\}$. Odpowiedniość z twierdzenia **[E1]**, Theorem 7.5 zachowuje zbiory $\nu_{F,i,j}$. Dokładniej, zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.4. *(**[E1]**, Corollary 8.1) Załóżmy, że F i E są ciałami funkcyjnymi n zmiennych nad ciałami globalnymi, które są równoważne w sensie Witta poprzez izomorfizm hiperciał $\alpha\colon Q(F) \to Q(E)$. Wówczas dla każdych $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ oraz $j \in \{0, 1, 2\}$ istnieje jednoznacznie wyznaczona bijekcja pomiędzy zbiorami $\nu_{F,i,j}$ i $\nu_{E,i,j}$ taka, że jeśli $v \leftrightarrow w$ poprzez przedmiotową bijekcję, to α odwzorowuje $(1 + M_v)\, F^{\times 2} / F^{\times 2}$ na $(1 + M_w)\, E^{\times 2} / E^{\times 2}$ oraz $U_v\, F^{\times 2} / F^{\times 2}$ na $U_w\, E^{\times 2} / E^{\times 2}$.*

W szczególności analiza bijekcji pomiędzy $\nu_{F,0,0}$ i $\nu_{E,0,0}$ prowadzi do następującego rezultatu:

Twierdzenie 2.5. *(**[E1]**, Corollary 8.2) Załóżmy, że $F \sim E$ są ciałami funkcyjnymi nad ciałami liczbowymi, których ciała stałych równe są, odpowiednio, k i ℓ. Jeżeli istnieje $v \in \nu_{F,0,0}$ taka, że $F_v = k$ i $w \in \nu_{E,0,0}$ taka, że $E_w = \ell$, to wówczas $k \sim \ell$.*

Używając Twierdzenia 2.5 wraz ze standardowymi argumentami z geometrii algebraicznej można w szczególności pokazać, że jeśli F i E są ciałami funkcji algebraicznych z globalnymi ciałami stałych k i ℓ o charakterystyce $\neq 2$ i takimi, że F i E nie mają punktów wymiernych, to $F \sim E$ implikuje $k \sim \ell$.

Odpowiedniość z **[E1]**, Theorem 7.5 pozwala uzyskać także interesujące rezultaty ilościowe. Jeśli k jest ciałem liczbowym, to każdy jego porządek jest archimedesowy, tzn. odpowiada zanurzeniu $k \hookrightarrow \mathbb{R}$. Niech r_1 będzie liczbą takich rzeczywistych zanurzeń ciała k, zaś r_2 liczbą sprzężonych par zanurzeń zespolonych ciała k. Wobec tego $[k\colon \mathbb{Q}] = r_1 + 2\, r_2$. Niech

$$V_k = \{r \in k^\times \mid (r) = \mathfrak{a}^2 \text{ dla pewnego ideału ułamkowego } \mathfrak{a} \text{ ciała } k\}.$$

Jest jasne, że V_k jest podgrupą $k^\times$ oraz $k^{\times 2} \subseteq V_k$. W tym przypadku otrzymana zasada lokalno-globalna dla ciał funkcyjnych nad ciałami globalnymi może być wzmocniona w następującym sensie:

Twierdzenie 2.6. *(**[E1]**, Theorem 8.6) Załóżmy, że $F = k(x_1, \ldots, x_n)$ i $E = \ell(x_1, \ldots, x_n)$ gdzie $n \geq 1$ oraz k i ℓ są ciałami liczbowymi, zaś $\alpha\colon Q(E) \to Q(F)$ jest izomorfizmem hiperciał. Wówczas*

(1) $r \in k^\times / k^{\times 2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha(r) \in \ell^\times / \ell^{\times 2}$.

(2) Odwzorowanie $r \mapsto \alpha(r)$ określa izomorfizm hiperciał pomiędzy $Q(k)$ i $Q(\ell)$.

(3) α odwzorowuje $V_k / k^{\times 2}$ w $V_\ell / \ell^{\times 2}$.

(4) 2-rangi grup klas ideałów ciał k i ℓ są sobie równe.

Jeżeli ℓ jest ciałem liczbowym, $[\ell\colon \mathbb{Q}]$ parzyste oraz $\ell \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, to wówczas, dla każdej liczby całkowitej $t \geq 1$, istnieje ciało liczbowe k takie, że $k \sim \ell$ i 2-ranga grupy klas ideałów k jest $\geq t$ [58]. Łącząc ten rezultat z Twierdzeniem 2.6 otrzymujemy:

Wniosek 2.7. *(**[E1]**, Corollary 8.8) Dla ustalonej liczby $n \geq 1$ i ustalonego ciała liczbowego ℓ, $[\ell\colon \mathbb{Q}]$ parzyste, $\ell \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, istnieje nieskończenie wiele nierównoważnych w sensie Witta ciał postaci $k(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie k jest ciałem liczbowym takim, że $k \sim \ell$.*

Przypadek gdy $[\ell\colon \mathbb{Q}]$ jest liczbą nieparzystą pozostaje otwarty. Nie jest także wiadome, czy dla dowolnych ciał F i E, $F(x) \sim E(x)$ pociąga $F \sim E$, ani czy założenie w Twierdzeniu 2.6 o tym, że F jest rozszerzeniem czysto przestępnym ciała k jest istotnie konieczne. Wysiłki zmierzające do odpowiedzi na powyższe pytania znajdują się w obszarze obecnych zainteresowań naukowych autora.

2.2 Praca [E2].

W niniejszej pracy autorzy rozszerzają wyniki **[E1]** na ciała funkcyjne krzywych zdefiniowanych nad ciałami lokalnymi. Głównym rezultatem jest lokalny odpowiednik Twierdzenia 2.4, który orzeka, że równoważność Witta dwóch ciał funkcyjnych jednej zmiennej nad ciałami lokalnymi o charakterystyce $\neq 2$ indukuje kanoniczną bijekcję pomiędzy pewnymi podzbiorami waluacji Abhyankara odpowienich ciał.

Dokładniej, niech F będzie dowolnym ciałem i niech T będzie podgrupą grupy $F^\times$. Przyjmując powszechnie obowiązującą terminologię w algebraicznej teorii form kwadratowych powiemy, że element $x \in F^\times$ jest *T-sztywny*, jeśli $T + Tx \subseteq T \cup Tx$. Definiujemy zbiór

$$B(T) = \{x \in F^\times \,|\, \mathrm{albo}\, x\, \mathrm{albo} - x\, \mathrm{nie\, jest}\, T - \mathrm{sztywny}\},$$

a jego elementy nazywamy *T-bazowymi.* Jeśli $\pm T = B(T)$, i albo $-1 \in T$ albo T jest zamknięty względem dodawania, to podgrupę T nazywamy *wyjątkową*.

Niech F będzie ciałem funkcyjnym jednej zmiennej nad ciałem lokalnym charakterystyki $\neq 2$. Niech

1. $\mu_{F,0}$ będzie zbiorem waluacji v ciała F takich, że $(F^\times\colon U_v\, F^{\times 2}) = 2$, $2^3 \leq (U_v\, F^{\times 2}\colon (1 + M_v)\, F^{\times 2}) < \infty$ i $B\,((1 + M_v)\, F^{\times 2}) = U_v\, F^{\times 2}$,

2. $\mu_{F,1}$ będzie zbiorem waluacji v ciała F takich, że $(F^\times\colon U_v\, F^{\times 2}) = 2$, $(U_v\, F^{\times 2}\colon (1 + M_v)\, F^{\times 2}) = \infty$ i $B\,((1 + M_v)\, F^{\times 2}) = U_v\, F^{\times 2}$,

3. $\mu_{F,2}$ będzie zbiorem waluacji v ciała F takich, że $(F^\times\colon U_v\, F^{\times 2}) = 4$, $(U_v\, F^{\times 2}\colon (1 + M_v)\, F^{\times 2}) = 2$ i $B\,((1 + M_v)\, F^{\times 2}) = U_v\, F^{\times 2}$,

4. $\mu_{F,3}$ będzie zbiorem waluacji v ciała F takich, że $(F^\times\colon U_v\, F^{\times 2}) = 4$, $(U_v\, F^{\times 2}\colon (1 + M_v)\, F^{\times 2}) = 2$ i $B\,((1 + M_v)\, F^{\times 2}) = (1 + M_v)\, F^{\times 2}$.

Oczywiście niektóre ze zbiorów $\mu_{F,i}$ mogą być puste. Dokładniej $\mu_{F,0} \neq \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy k jest dyadyczna, $\mu_{F,1} \neq \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy k jest p-adyczna oraz $\mu_{F,2} \cup \mu_{F,3} \neq \emptyset$ wtedy i tylko wtedy, gdy k jest p-adyczna, $p \neq 2$. Zauważmy, że

$$\mu_{F,0} \cup \mu_{F,1} \cup \mu_{F,2} \cup \mu_{F,3}$$

jest zbiorem wszystkich waluacji Abhyankara ciała F nad k. Po powyższych uwagach i ustaleniu oznaczeń jesteśmy w stanie zacytować:

Twierdzenie 2.8. *(**[E2]**, Theorem 3.5) Załóżmy, że F i E są ciałami funkcyjnymi jednej zmiennej nad ciałami lokalnymi charakterystyki $\neq 2$, które są równoważne w sensie Witta poprzez izomorfizm hiperciał $\alpha\colon Q(F) \to Q(E)$. Wówczas dla każdego $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ istnieje jednoznacznie wyznaczoa bijekcja pomiędzy $\mu_{F,i}$ i $\mu_{E,i}$ taka, że jeśli $v \leftrightarrow w$ poprzez przedmiotową bijekcję, to α odwzorowuje $(1 + M_v)\, F^{\times 2}/F^{\times 2}$ na $(1 + M_w)\, E^{\times 2}/E^{\times 2}$ oraz $U_v\, F^{\times 2}/F^{\times 2}$ na $U_w\, E^{\times 2}/E^{\times 2}$ dla $i \in \{0, 1, 2\}$, jak również $(1 + M_v)\, F^{\times 2}/F^{\times 2}$ na $(1 + M_w)\, E^{\times 2}/E^{\times 2}$ dla $i = 3$.*

Wbrew intuicji, którą można byłoby sobie wyrobić bazując na warunkach koniecznych i wystarczających równoważności Witta ciał lokalnych oraz globalnych, przypadek ciał funkcyjnych jednej zmiennej nad ciałami lokalnymi wcale nie jest prostszy do rozstrzygnięcia od przypadku ciał funkcyjnych nad ciałami globalnymi.

Twierdzenie 2.8 jest w dalszym ciągu pracy zastosowane do pokazania, że, pod pewnymi założeniami, równoważność Witta dwóch ciał funkcyjnych krzywych nad ciałami lokalnymi k i ℓ implikuje równoważność Witta ciał k i ℓ. Otrzymujemy w ten sposób odpowiednik Twierdzenia 2.5 w przypadku lokalnym. Dokładniej:

Twierdzenie 2.9. *(**[E2]**, Theorem 3.6) Niech $F \sim E$ będą ciałami funkcyjnymi jednej zmiennej nad ciałami stałymi lokalnymi, odpowiednio, k i ℓ. Wówczas $k \sim \ell$, być może za wyjątkiem sytuacji, gdy k, ℓ są obydwa dyadycznymi ciałami lokalnymi. W tym przypadku, jeżeli istnieją $v \in \mu_{F,0}$ taka, że $F_v = k$ oraz $w \in \mu_{E,0}$ taka, że $E_w = \ell$, to wówczas $k \sim \ell$.*

Zauważmy, że powyższe twierdzenie dostarcza częściowej odpowiedzi na jeden z otwartych problemów pozostawionych w pracy **[E1]**.

2.3 Praca [E3].

Praca **[E3]**, wbrew swemu tytułowi, jest nie tylko przeglądem klasycznych wyników o równoważności Witta ciał z uwzględnieniem rezultatów uzyskanych w pracach **[E1]**, **[E2]** i [21], ale także zawiera nowe, krótsze dowody znanych od dawna twierdzeń otrzymane przy użyciu języka hiperciał. Pokazuje tym samym zalety nowego podejścia do tematyki. Tym nie mniej głównym powodem, dla którego praca **[E3]** pojawia się w monotematycznym cyklu niniejszego autoreferatu jest to, że streszcza ona rezultaty pracy [21], która, w momencie przygotowywania niniejszego opracowania, przechodziła wciąż proces recenzencki. Z tego względu skupimy się tutaj głównie na wynikach z **[E3]** cytujących [21].

Zajmijmy się, mianowicie, równoważnością w sensie Witta ciał funkcyjnych krzywych stożkowych nad ciałem k charakterystyki $\neq 2$. Ciała takie są postaci $k_{a,b}$, gdzie $k_{a,b}$ oznacza ciało ułamków pierścienia $k[x,y]/(ax^2+by^2-1)$. Nieco bardziej uszczegółowiona wersja Twierdzenia 2.6, odpowiadająca specyficznemu przypadkowi ciał funkcyjnych krzywych stożkowych, może być sformułowana w następującej postaci:

Twierdzenie 2.10. *(**[E3]**, Theorem 10.3, or [21], Theorem 4.4) Załóżmy, że F i E są ciałami funkcyjnymi krzywych rodzaju 0 zdefiniowanych nad stałymi ciałami liczbowymi k i ℓ, odpowiednio, oraz że $\alpha\colon Q(F) \to Q(E)$ jest izomorfizmem hiperciał. Wówczas*

1. *$r \in k^*/k^{*2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha(r) \in \ell^*/\ell^{*2}$;*
2. *α wyznacza bijekcję pomiędzy porządkami P ciała k, które rozszerzają się do F, a porządkami Q ciała ℓ, które rozszerzają się do E w następujący sposób: $P \leftrightarrow Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy α odwzorowuje P^*/k^{*2} na Q^*/ℓ^{*2};*
3. *α odwzorowuje V_k/k^{*2} na V_ℓ/ℓ^{*2};*
4. *$[k\colon \mathbb{Q}] = [\ell\colon \mathbb{Q}]$;*
5. *F jest czysto przestępnym rozszerzeniem k wtedy i tylko wtedy, gdy E jest czysto przestępnym rozszerzeniem ℓ. W takim przypadku odwzorowanie $r \mapsto \alpha(r)$ określa izomorfizm hiperciał $Q(k)$ i $Q(\ell)$, zaś 2-rangi grup klas ideałów ciał k i ℓ są sobie równe.*

Działając w duchu Wniosku 2.7 jesteśmy zainteresowani odpowiedzią na pytanie, czy możemy wskazać nieskończenie wiele nierównoważnych w sensie Witta ciał postaci $k_{a,b}$, gdzie k jest ciałem liczbowym. Stosując Twierdzenie 2.10 wspólnie z wybranymi wynikami z klasycznej teorii liczb, jak również ze starymi twierdzeniami znanymi już Wittowi, otrzymujemy następujące:

Twierdzenie 2.11. *(**[E3]**, Theorem 10.5, or [21], Theorem 4.7) Niech k będzie ciałem liczbowym, r liczbą porządków ciała k, w liczbą nierównoważnych w sensie Witta ciał postaci $k_{a,b}$, $a, b \in k^\times$. Wówczas*

$$w \geq \begin{cases} 2, & \text{gdy} -\overline{1} \in D_k(\langle \overline{1}, \overline{1} \rangle), \\ 3, & \text{gdy} -\overline{1} \notin D_k(\langle \overline{1}, \overline{1} \rangle) \text{ oraz } k \text{ nie jest formalnie rzeczywiste}, \\ r+3, & \text{gdy } k \text{ jest formalnie rzeczywiste.} \end{cases}$$

Podobnie, motywowani Twierdzeniem 2.5, chcielibyśmy wiedzieć, kiedy $k_{a,b} \sim \ell_{c,d}$ implikuje $k \sim \ell$. Na tak postawione pytanie jesteśmy w stanie udowodnić następujące

Twierdzenie 2.12. *(**[E3]**, Theorem 10.6, or [21], Proposition 4.9) Załóżmy, że $\alpha\colon Q(\mathbb{Q}_{a,b}) \to Q(\mathbb{Q}_{c,d})$ jest izomorfizmem hiperciał. Wówczas, dla dowolnej liczby pierwszej p, $\alpha(p) = \pm q$ dla pewnej liczby perwszej q, oraz $p = 2 \Rightarrow q = 2$.*

W istocie, powołując się na rezultaty uzyskane dla ciał funkcyjnych nad ciałami lokalnymi, jesteśmy w stanie podać twierdzenia nieco ogólniejsze:

Twierdzenie 2.13. *(**[E3]**, Theorem 10.9, or [21], Theorem 4.12) Załóżmy, że k, ℓ są ciałami lokalnymi charakterystyki $\neq 2$, $a, b \in k^*$, $c, d \in \ell^*$. Wówczas $k_{a,b} \sim \ell_{c,d} \Rightarrow k \sim \ell$.*

Twierdzenie 2.14. *(**[E3]**, Theorem 10.10, or [21], Theorem 4.13) Załóżmy, że k jest ciałem lokalnym charakterystyki $\neq 2$, a, b, c, $d \in k^*$. Wówczas $k_{a,b} \sim k_{c,d} \Rightarrow (\frac{a,b}{k}) = (\frac{c,d}{k})$, być może za wyjątkiem przypadku, gdy k jest ciałem p-adycznym poziomu 1, dla pewnej nieparzystej liczby pierwszej p.*

Pytania o równoważność Witta ciał pozostają wciąż w znacznej mierze otwarte i definitywnie znajdują się w obszarze zainteresowań naukowych autora. Poza niektórymi z problemów wzmiankowanymi w powyższej dyskusji, autor w chwili obecnej prowadzi badania nad rozszerzeniem wyników z pracy **[E3]**/[21] dotyczących ciał funkcyjnych krzywych rodzaju 0 na ciała funkcyjne krzywych eliptycznych – w związku z ich elegancką, aczkolwiek skomplikowaną, arytmetyką, jest to zadanie skomplikowane, lecz równocześnie niezwykle motywujące. Autor wyraża przy tym przekonanie, że zastosowanie języka hiperciał okaże się owocne i pozwoli znacznie uprościć argumenty dowodowe.

Podobnie, nie są znane nietrywialne przykłady dwóch równoważnych w sensie Witta ciał, z których jedno byłoby charakterystyki 2, drugie zaś charakterystyki $\neq 2$. Uogólnienia twierdzenia Springera uzyskane w **[E1]** powinny pozwolić na wygodny opis informacji zawartych w pierścieniach Witta ciał iterowanych szeregów potęgowych o charakterystyce $\neq 2$. Autor wyraża nadzieję, że podobne wyniki powinny być możliwe do uzyskania także w przypadku charakterystyki 2, co w rezultacie doprowadziłoby do znalezienia poszukiwanych przykładów.

Na koniec, byłoby w najwyższym stopniu pożądane znalezienie nie tylko koniecznych, ale także wystarczających warunków zachodzenia równoważności Witta dwóch ciał funkcyjnych nad ciałami globalnymi bądź lokalnymi. Wydaje się to niesłychanie trudnym zadaniem, autor wyraża wszelako nadzieję, iż powinno być możliwe do osiągnięcia w przypadku słabszych form równoważności Witta, takich jak równoważność symboli pomiędzy ciałami. Jako pierwszy krok w realizacji takiego programu autor chciałby się przekonać, czy możliwe jest proste scharakteryzowanie równoważności symboli w języku hiperciał.

3 Multipierścienie, hiperciała i porządki wyższych stopni.

Słynny 17-ty problem Hilberta zapytywał, że wielomian n zmiennych o współczynnikach z $\mathbb{R}$ przyjmujący wartości nieujemne w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest koniecznie sumą kwadratów funkcji wymiernych n zmiennych o współczynnikach z $\mathbb{R}$. Kompletne rozstrzygnięcie tego zagadnienia przez Artina i Schreiera [3] stworzyło fundamenty pod nowy dział algebry, zwany dziś algebrą rzeczywistą, zaś ich przełomowe rezultaty zostały do dziś uogólnione na najróżniejsze sposoby. Przypomnijmy podstawowe pojęcia, którymi będziemy się posługiwać: dla ciała F, char $F \neq 2$, *praporządkiem* nazywamy podzbiór T spełniający warunki

$$T+T\subseteq T, TT\subseteq T \text{ oraz } a^2\in T \text{ dla wszelkich } a\in F.$$

Niech $\sum F^2$ oznacza zbiór złożony z wszystkich skończonych sum $\sum a_i^2$, $a_i\in F$. Jest to najmniejszy praporządek ciała F. Praporządek T nazywamy *właściwym*, jeżeli $-1\notin T$. *Porządkiem* w ciele F nazywamy podzbiór P spełniający warunki

$$P+P\subseteq P, PP\subseteq P, P\cup -P=F \text{ oraz } P\cap -P=\{0\}.$$

Każy porządek jest praporządkiem. Ciało jest *formalnie rzeczywiste*, jeśli $-1\notin\sum F^2$. Podstawowe fakty klasycznej teorii ciał uporządkowanych możemy podsumować następująco:

1. jeśli T jest właściwym praporządkiem i $a\notin T$, zaś P jest praporządkiem maksymalnymw zbiorze praporządków takich, że $T\subseteq P$ i $a\notin P$, to wówczas P jest porządkiem; zbiór wszystkich porządków zawierających praporządek T będziemy oznaczać przez X_T, zaś zbiór $X_{\sum F^2}$ wszystkich porządków ciała F będziemy oznaczać przez X_F;

2. dla dowolnego praporządku T zachodzi $T=\bigcap_{P\in X_T} P$;

3. ciało F jest formalnie rzeczywiste $\Leftrightarrow$ F zawiera właściwy praporządek $\Leftrightarrow$ F zawiera porządek.

Pojęcia odpowiadające praporządkom i porządkom w ciałach istnieją także w pierścieniach przemiennych z 1 takich, że 2 jest jednością (które, od teraz, będziemy nazywali po prostu pierścieniami). Niech A będzie takim pierścieniem. *Praporządki* w A definiujemy dokładnie w ten sam sposób jak w przypadku ciał, to znaczy jako podzbiory T zbioru A takie, że

$$T+T\subseteq T, TT\subseteq T \text{ oraz } a^2\in T \text{ dla wszelkich } a\in A,$$

zaś *porządki* jako podzbiory P zbioru A takie, że

$$P+P\subseteq P, PP\subseteq P, P\cup -P=F \text{ oraz } P\cap -P \text{ jest ideałem pierwszym } A \text{ zwanym } \textit{nośnikiem}\, P.$$

Formalnie rzeczywiste pierścienie defiujemy dokładnie tak samo, jak formalnie rzeczywiste ciał i tym samym własności 1. – 3. praporządków i porządków ciał przenoszą się na grunt pierścieni. Zbiór wszystkich porządków pierścienia A nazywamy *spektrum rzeczywistym* A i oznaczamy przez $\mathrm{Sper}(A)$, zaś zbiór wszystkich porządków A zawierających praporządek T oznaczamy przez $\mathrm{Sper}_T(A)$. Dla elementu $a\in A$ definiujemy funkcję *znak* $\mathrm{sgn}_a\colon \mathrm{Sper}(A)\to\{-1,0,1\}$ wzorem

$$\mathrm{sgn}_a(P)=\begin{cases} 1, & \text{gdy } a\notin -P,\\ 0, & \text{gdy } a\in P\cap -P,\\ -1, & \text{gdy } a\notin P.\end{cases}$$

Abstrakcyjne uogólnienie 17 problemu Hilberta, powszechnie znane jako *Positivstellensatz*, może być sformułowane w następującej postaci (zob., na przykład, [44], Theorem 2.5.2):

Twierdzenie 3.1. *Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką i odwracalnym elementem 2, niech T będzie praporządkiem w A i niech $a \in A$. Wówczas:*

$$\mathrm{sgn}_a(P) \geq 0, \ \textit{dla wszelkich } P \in \mathrm{Sper}_T(A) \Leftrightarrow pa = a^{2m} + q, \ \textit{dla pewnych } p, q \in A, m \in \mathbb{N}.$$

Tak jak powyżej wspominaliśmy, praporządki i porządki zostały uogólnione na wiele sposobów. Jednym z takich uogólnień są wprowadzone przez Beckera [7] praporząki i porządki wyższego stopnia. W ich przypadku występujące w definicjach sumy kwadratów zastąpione są sumami 2^n-tych potęg: dokładniej, *praporządkiem stopnia* n nazywamy podzbiór T ciała F taki, że

$$T + T \subseteq T, TT \subseteq T \text{ oraz } a^{2^n} \in T \text{ dla wszelkich } a \in F,$$

zaś *porządkiem stopnia* n podzbiór P ciała F taki, że

$$P + P \subseteq P, P^\times \text{ jest podgrupą grupy } F^\times, P \cup -P = F, \text{ oraz } F^\times / P^\times \text{ jest cykliczna i } |F^\times / P^\times| \,|\, 2^n.$$

Jeśli $|F^\times / P^\times| = 2^n$, mówimy, że P jest *dokładnego stopnia* n. Podobnie, ciało jest n*-formalnie rzeczywiste*, jeżeli -1 nie jest sumą 2^n-tych potęg. Podstawowe własności 1. – 3. praporządków i porządków przenoszą się na przypadek praporządków i porządków stopnia n, jest też jasne, że praporządki i porządki stopnia n dla $n = 1$ są niczym innym jak zwykłymi praporządkami i porządkami.

Praporządki i porządki stopnia n mogą być też zdefiniowane dla pierścieni. Definicje praporządków stopnia n dla pierścieni oraz n-formalnie rzeczywistych pierścieni są takie same jak w przypadku ciał, natomiast *porządkiem stopnia* n w pierścieniu A nazywamy podzbiór $P \subseteq A$ taki, że

i. $P + P \subseteq P, PP \subseteq P$ oraz $a^{2^n} \in P$ dla wszelkich $a \in A$,

ii. $P \cap -P = \mathfrak{p}$ jest ideałem pierwszym pierścienia A,

iii. jeśli $ab^{2^n} \in P$, to $a \in P$ lub $b \in P$,

iv. zbiór

$$\overline{P} = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i^{2^n} \overline{p}_i | \, a_1, \dots, a_k \in k(\mathfrak{p}), p_1, \dots, p_k \in P, k \in \mathbb{N} \right\}$$

jest porządkiem stopnia n w ciele ułamków $k(\mathfrak{p})$ pierścienia $A / \mathfrak{p}$. Tutaj $\overline{p}_i = p_i + \mathfrak{p} \in A / \mathfrak{p}$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Odpowiedniki własności 1. – 3. dla praporządków i porządków stopnia n, jak również Positivstellensatz, mogą być również sformułowane w takim kontekście.

Teoria porządków pozostaje w silnym związku z teorią form kwadratowych z racji roli granej w obydwu teoriach przez sumy kwadratów. Z kolei teoria form kwadratowych, jak już zdążyliśmy się przekonać, jest blisko związana z teorią hiperciał. Tym samym rodzi się naturalne pytanie, czy praporządki i porządki mogą być sensownie zdefiniowane dla hiperciał, multipierścieni i hiperpierścieni, w szczególności zaś, czy własności 1. – 3., jak również Positivstellensatz mają swoje odpowiedniki w tak zaprojektowanej teorii. Okazuje się, że jest tak w istocie, co zostało zrobione przez Marshalla [43]. Ponadto w końcowych uwagach swojej pracy zwraca on uwagę na potrzebę skonstruowania teorii porządków stopni n podobną do tej zbudowanej przez Beckera [7]. Sugestia ta stała się dla autora motywacją do podjęcia projektu, który zaowocował opublikowaniem prac **[O1]**–**[O3]**. Omówimy je teraz bardziej szczegółowo

3.1 Praca [O1].

Jest to praca otwierająca całą serię publikacji, w której znajdują się kluczowe definicje i wprowadzone są podstawowe twierdzenia odpowiadające własnościom 1. − 3. wraz z Positivstellensatz dyskutowanymi powyżej. Terminologia używana w pracy zdążyła się nieco zmienić od momentu jej opublikowania i w niniejszym opracowaniu będziemy używać tej używanej współcześnie: w szczególności to, co w **[O1]** nazywane jest *multiciałem*, jest w istocie hiperciałem. Definicje praporządków i porządków stopnia n dla hiperciał i multipierścieni ściśle odpowiadają definicjom dla ciał i pierścieni: jeśli H jest hiperciałem, to *praporządkiem* stopnia n nazywamy podzbiór T zboru H taki, że

$$T+T\subseteq T, TT\subseteq T \,\text{oraz}\, a^{2^n}\in T \,\text{dla wszelkich}\, a\in H,$$

który jest *właściwy*, jeśli $-1\notin T$, zaś *porządkiem stopnia* n nazywamy podzbiór P zbioru H taki, że

$$P+P\subseteq P, P^{\times} \text{ jest podgrupą grupy } H^{\times}, P\cup -P=H \text{ oraz } H^{\times}/P^{\times} \text{jest cykliczna i } |H^{\times}/P^{\times}|\,|\,2^n,$$

który jest *dokładnego stopnia* n, jeśli $|F^{\times}/P^{\times}|=2^n$, z kolei hiperciało nazwiemy *n-formalnie rzeczywistym*, jeśli -1 nie jest elementem sumy 2^n-tych potęg. Następujące dwa rezultaty są odpowiednikami własności 1. − 3.:

Twierdzenie 3.2. *(**[O1]**, Theorem 1) Niech H będzie hiperciałem. Następujące warunki są równoważne:*

1. *H jest formalnie n-rzeczywiste,*
2. *H zawiera porządek stopnia n,*
3. *H zawiera właściwy praporządek stopnia n.*

Twierdzenie 3.3. *(**[O1]**, Theorem 2) Niech H będzie hiperciałem, $T\subset H$ praporządkiem stopnia n. Jeśli T jest właściwy, to $T=\bigcap_{P\in X_T}P$.*

Dowody powyższych twierdzeń są modyfikacjami dowodów dostępnych w przypadku ciał. Główna trudność w ich „przetłumaczeniu” polegała na tym, że w przypadku ciał zawsze prawdziwa jest równość $1-1=0$, podczas gdy dla hiperciał wiemy jedynie tyle, że $0\in 1-1$: tym nie mniej, przynajmniej w przypadku powyższych dwóch twierdzeń, zawsze okazywało się możliwe znalezienie rozumowania omijającego tę niedogodność.

Niestety, problem ten nasila się przy rozważaniu multipierścieni: powszechnie używane w przypadku pierścieni założenie, że element $2=1+1$ jest odwracalny nie ma tu sensu, albowiem $1+1$ nie jest elementem, lecz zbiorem. Niezależnie od tego, definicje praporządków i porządków stopnia n dla multipierścieni mogą być tu podane w, mniej więcej, tej samej formie jak w przypadku pierścieni: multipierścień jest *n-formalnie rzeczywisty* gdy -1 nie jest w zbiorze sum 2^n-tych potęg, *praporządek stopnia n* multipierścienia A jest podzbiorem zbioru A takim, że

$$T+T\subseteq T, TT\subseteq T \,\text{oraz}\, a^{2^n}\in T \,\text{dla wszelkich}\, a\in A,$$

który jest *właściwy*, gdy $-1\notin T$, zaś *porządek stopnia n* w multipierścieniu A jest podzbiorem P zbioru A takim, że

i. $P+P\subseteq P, PP\subseteq P$ oraz $a^{2^n}\in P$ dla wszelkich $a\in A$,

ii. $P\cap -P=\mathfrak{p}$ jest ideałem pierwszym pierścienia A,

iii. jeśli $ab^{2^n}\in P$, to $a\in P$ lub $b\in P$,

iv. zbiór

$$\overline{P} = \bigcup \{a_1^{2^n}\overline{p}_1 + \ldots + a_k^{2^n}\overline{p}_k | \, a_1, \ldots, a_k \in k(\mathfrak{p}), p_1, \ldots, p_k \in P, k \in \mathbb{N}\}$$

jest porządkiem stopnia n w hiperciele ułamków $k(\mathfrak{p})$ multipierścienia $A/\mathfrak{p}$.

Tutaj $\overline{p}_i = p_i + \mathfrak{p} \in A/\mathfrak{p}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, natomiast pojęcia ideału, ideału pierwszego, multipierścienia ilorazowego i hiperciała ułamków zdefiniowane są tak samo jak dla zwykłych pierścieni, aczkolwiek nie bez pewnych ograniczeń: przykładowo kanoniczny morfizm z multipierścienia do jego hiperciała ułamków $a \mapsto \frac{a}{1}$ niekoniecznie musi być injektywny.

Jako rezultaty odpowiadające własnościom 1. – 3. oraz Positivstellensatz, otrzymujemy tu następujące twierdzenia:

Twierdzenie 3.4. *(**[O1]**, Theorem 4) Niech A będzie multipierścieniem. Następujące warunki są równoważne:*

1. *A jest formanie n-rzeczywisty oraz $A = \Sigma A^{2^n} - \Sigma A^{2^n}$,*
2. *A zawiera porządek stopnia n P taki, że $A = P - P$,*
3. *A zawiera właściwy praporządekstopnia n T taki, że $A = T - T$.*

Twierdzenie 3.5. *(**[O1]**, Theorem 5) Niech A będzie multipierścieniem, $T \subset A$ praporządkiem stopnia n. Jeżeli T jest właściwy i taki, że $A = T - T$, to wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *$a \in \bigcap_{P \in X_T} P$,*
2. *$a\,t \in a^{2^{nk}} + t'$, dla pewnych $t, t' \in T$, $k \in \mathbb{N}$.*

Niestety, autor był w stanie wykazać powyższe twierdzenia jedynie przy dodatkowym założeniu, że rozważane właściwe praporządki T spełniają dodatkowy warunek $A = T - T$. W przypadku zwykłych pierścieni można stosunkowo łatwo pokazać, że równość $A = T - T$ jest równoważna temu, że praporządek T jest właściwy, przy czym dowód zasadza się na wykorzystaniu następującej identyczności arytmetycznej (por. [26], Théoréme 8.2.2):

$$k!x = \sum_{h=0}^{k-1} (-1)^{k-1-h} \binom{k-1}{h} [(x+h)^k - h^k],$$

która, w oczywisty sposób, nie jest prawdziwa dla multipierścieni i tym samym uniemożliwia przeniesienie argumentacji z przypadku pierścieni na multipierścienie.

3.2 Praca [O2].

Niesatysfakcjonujące rezultaty drugiej połowy pracy **[O1]** zmotywowały autora do poszukiwań możliwych dróg wyeliminowania dodatkowego założenia $T - T = A$ w Twierdzeniach 3.4 i 3.5. Udało się to z powodzeniem osiągnąć we wspólnej z Marshallem pracy **[O2]**. Dla multipierścienia (lub hiperciała) *charakterystykę* definiujemy jako najmniejszą liczbę naturalną n taką, że $0 \in \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}$, lub jako 0 gdy liczba taka nie istnieje. Autorom udało się uzyskać następujący rezultat:

Twierdzenie 3.6. *(**[O2]**, Theorems 3.2 and 3.5)*

1. *Niech H będzie hiperciałem, $\operatorname{char} H = 0$, niech $n \geq 0$. Wówczas $H = \sum H^{2^n} - \sum H^{2^n}$.*

2. *Niech A będzie multipierścieniem takim, że dla każdego ideału maksymalnego $\mathfrak{m}$ w A i dla każdego $s \in A \setminus \mathfrak{m}$*

$$\left(\bigcup_{k \geq 2} \underbrace{s + \ldots + s}_{k}\right) \cap \mathfrak{m} = \emptyset,$$

niech $n \geq 0$. Wówczas $A = \sum A^{2^n} - \sum A^{2^n}$.

Dowód jest skomplikowany i całkowicie niezależny od argumentacji w przypadku ciał/pierścieni, ale przebiega zgodnie z często spotykaną w teorioliczbowych rozumowaniach strategią ustanawiania rezultatu najpierw dla hiperciał, następnie dla lokalnych multipierścieni, a dopiero na końcu w przypadku ogólnym. Autorzy spodziewają się także, że założenie $\operatorname{char} H = 0$ nie jest konieczne.

Dla praporządku stopnia n T, *T-modułem* nazywamy podzbiór $M \subset A$ taki, że

$$M + M \subseteq M, TM \subseteq M, 1 \in M.$$

Jeżeli dodatkowo $-1 \notin M$, to M nazywamy *właściwym* T-modułem. Jako krok pośredni w dowodzie Positivstellensatz dowodzi się najpierw, że T-moduł M maksymalny w zbiorze T-modułów takich, że $-1 \notin M$, spełnia warunek $M \cup -M = A$. W pracy **[O1]** udało się to zrobić przy dodatkowym założeniu $A = T - T$, natomiast w **[O2]** autorzy uzyskali następujący rezultat:

Twierdzenie 3.7. *(**[O2]**, Theorem 5.2) Załóżmy, że A jest multipierścieniem, T właściwym praporządkiem stopnia n w A, zaś M jest T-modułem w A maksymalnym wśród T-modułów takich, że $-1 \notin M$. Wówczas $M \cap -M$ jest ideałem pierwszym A oraz $M \cup -M = A$.*

Przy użyciu powyższego rezultatu jest możliwe podanie następującej postaci Positivstellensatz bez dodatkowego założenia obecnego w Twierdzeniu 3.5: dla praporządku T stopnia n w A definiujemy relację równoważności $\sim$ na A zwaną *T-równoważnością* warunkiem

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{dla każdego } P \in X_T \text{ takiego, że } \mathfrak{p} = P \cap -P \text{ albo } a, b \in P, \text{ albo } a, b \notin P \text{ i } \frac{a + \mathfrak{p}}{b + \mathfrak{p}} \in \overline{P},$$

gdzie $\overline{P}$ jest porządkiem indukowanym na hiperciele $k(\mathfrak{p})$. Klasę równoważności elementu a względem tej relacji oznaczać będziemy przez $\bar{a}$, tak więc $\bar{a} = \bar{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \sim b$. Klasę $\bar{a}$ będziemy nazywać *znakiem* elementu a na X_T. Będziemy pisać $\bar{a} = 0$ (odpowiednio, $\bar{a} \geq 0$ i $\bar{a} > 0$) na $(\mathfrak{p}, \mathfrak{P})$ dla zaznaczenia, że obraz a w hiperciele ułamków $\operatorname{ff}(A / \mathfrak{p})$ multipierścienia $A / \mathfrak{p}$ jest równy zeru (odpowiednio, należy do P, i należy do P, ale nie jest równy zeru).

Twierdzenie 3.8. *(**[O2]**, Corollary 7.3)*

1. *$\bar{a} = 0$ na X_T wtedy i tylko wtedy, gdy $-a^{2^\ell k} \in T$ dla pewnego $k \geq 0$.*

2. *$\bar{a} > 0$ na X_T wtedy i tylko wtedy, gdy $-1 \in T - \sum A^{2^\ell} a$.*

3. *$\bar{a} \geq 0$ na X_T wtedy i tylko wtedy, gdy $-a^{2^\ell k} \in T - \sum A^{2^\ell} a$ dla pewnego $k \geq 0$.*

4. *Ustalmy $a \in b^{2^\ell} + c^{2^\ell}$. Wówczas $\bar{b} = \bar{c}$ na X_T wtedy i tylko wtedy, gdy $-a^{2^\ell k} \in T - \sum A^{2^\ell} b c^{2^\ell - 1}$ dla pewnego $k \geq 0$.*

Poza powyższymi rezultatami, także kilka nowych własności porządków wyższych stopni zostało opisanych w **[O2]**. Po pierwsze, autorzy wyjaśnili jak rezultaty dotyczące ideałów rzeczywistych rozszerzają się na przypadek ideałów rzeczywistych wyższych stopni w multipierścieniach (**[O2]**, Propositions 8.1 – 8.5). Po drugie, autorzy skonstruowali funktor (refleksję)

$$A \rightsquigarrow Q_{n-\mathrm{red}}(A)$$

z kategorii multipierścieni spełniających warunek $-1 \notin \sum A^{2^n}$ na pewną (pełną) podkategorię, zwaną kategorią n-rzeczywiście zredukowanych multipierścieni i scharakteryzowali n-rzeczywiście zredukowane multipierścienie jako niezerowe multipierścienie spełniające następujące proste aksjomaty:

1. $a^{2^n+1} = a$,

2. $a + a\,b^{2^n} = \{a\}$,

3. $a^{2^n} + b^{2^n}$ zawiera dokładnie jeden element.

W istocie udało się pokazać odrobinę więcej i autorzy skonstruowali n-rzeczywiście zredukowany multipierścień $Q_T(A)$ dla każdego właściwego praporządku T stopnia n w A, przy czym $Q_{n-\mathrm{red}}(A)$ jest multipierścieniem otrzymanym przez tę konstrukcję gdy $T = \sum A^{2^n}$ (**[O2]**, Theorem 9.7). Także i tu dowód jest dosyć skomplikowany i w znacznej mierze opiera się na Twierdzeniu 3.7. Dla hiperciał spełniających aksjomat 1. można pokazać, że aksjomaty 2. i 3. redukują się do pojedynczego aksjomatu

4. $1 + 1 = \{1\}$

(**[O2]**, Proposition 9.2). Zgodnie z pracą [43], 1-rzeczywiście zredukowane hiperciała odpowiadają przestrzeniom porządków (które omówimy szczegółowiej w dalszej części niniejszego opracowania), jest zatem naturalne zapytywać się, czy n-rzeczywiście zredukowane hiperciała odpowiadają przestrzeniom znaków zdefiniowanych w [46], [50], [51]. Autorom udało się wskazać przykład ilustrujący, że wcale nie musi tak być oraz sformułować dodatkowy aksjomat, który można postrzegać jako pewną własność symetryczności:

$$\text{dla wszelkich nieparzystych liczb całkowitych } 1 \leq k \leq 2^n,\ a \in b + c \Rightarrow a^k \in b^k + c^k,$$

który jest spełniony w przestrzeniach znaków, ale w ogólności nie zachodzi dla n-rzeczywiście zredukowanych hiperciał (**[O2]**, Example 10.3 oraz Proposition 10.4).

3.3 Praca [O3].

Ostatnia praca w tej serii zajmuje się pojęciem selekcji pierwiastków, które jest poniekąd styczne do praporządków i porządków. Przy rozważaniu multyplikatywnej grupy kwadratów $F^{\times 2}$ ciała F, nasuwa się naturalne pytanie kiedy możliwe jest zdefiniowanie dobrze zachowującej się funkcji pierwiastka kwadratowego, to znaczy homomorfizmu ϕ: $F^{\times 2} \to F^\times$ który odwzorowuje kwadrat c^2 na c pomnożony przez „znak", czyli takiego, że $\phi(c^2) = \omega\, c$, gdzie $\omega^2 = 1$. Kwestią tą zająć się Waterhouse [62] i okazuje się, że istnienie takich homomorfizmów jest blisko związane z istnieniem porządków. Po pierwsze, homomorfizm ϕ: $F^{\times 2} \to F^\times$ taki, że $\phi(c^2) = \omega\, c$, gdzie $\omega^2 = 1$, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podgrupa R grupy $F^\times$ zwana *selekcją pierwiastków* o tej własności, że dowolny element $F^\times$ może być jednoznacznie przedstawiony jako $\omega\, r$ przy $\omega^2 = 1$ oraz $r \in R$ ([62], Lemma, p. 235). Po drugie, selekcja pierwiastków istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy -1 nie jest kwadratem w F ([62], Theorem 1); jako że, wobec klasycznych twierdzeń Artina i Schreiera [3], porządek w F istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy -1 nie jest sumą kwadratów w F, wynika stąd bezpośrednio, że selekcje pierwiastków istnieją w każdym uporządkowanym ciele (ale, oczywiście, nie tylko w nich: najprostszym przykładem niech będzie ciało $\mathbb{F}_q$ gdzie $q \equiv 3 \mathrm{mod}\ 4$, tak aby $-1 = q - 1 \notin \mathbb{F}_q^{*2}$). Tym samym selekcje pierwiastków mogą być postrzegane jako uogólnienia porządków. Wobec tego skromna ale przyjemna teoria ciał wyposażonych w selekcje pierwiastków może zostać skonstruowana poniekąd równolegle do teorii ciał uporządkowanych, gdzie rozważać można kwestie takie jak istnieje selekcji pierwiastków (które właśnie pokrótce przedyskutowaliśmy), rozszerzenia ciał wyposażonych w selekcje pierwiastków, czy struktura maksymalnych ciał wyposażonych w selekcje pierwiastków (do pewnego stopnia odpowiadających koncepcji ciała rzeczywiście domkniętego).

Powyższe problemy zostały zasadniczo rozstrzygnięte w pracy Waterhouse'a [62], a jej główne wyniki zostały zreferowane na seminarium algebraicznym Uniwersytetu Śląskiego przez przechodzącego na emeryturę prof. Andrzeja Sładka. Pod koniec swojego wystąpienia prof. Sładek zachęcił słuchaczy do rozszerzenia teorii selekcji pierwiastków na selekcje wyższych stopni, którego to projektu wkrótce podjął się autor niniejszego opracowania. Rzeczywiście, większość rezultatów pracy [62] uogólnia się w elegancki sposób na przypadek multyplikatywnych grup $F^{\times 2^p}$ potęg stopnia 2^p w ciele F i w konsekwencji pociąga istnienie sensownie zachowujących się 2^p-tych selekcji pierwiastków. W miniaturowej nocie [20], która w momencie spisywania niniejszego autoreferatu przechodzi jeszcze proces recenzencki, autor pokazał, że dla ciała F zawierającego pierwiastek pierwotny ω_{2^p} z 1 stopnia 2^p, homomorfizm ϕ: $F^{\times 2^p} \to F^\times$ taki, że $\phi(c^{2^p}) = \omega_{2^p}^k c$, dla pewnych $k \in \{1, ..., 2^p\}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje multyplikatywna podgrupa R grupy $F^\times$, zwana 2^p*-tą selekcją pierwiastków* o tej własności, że dowolny element $F^\times$ może być jednoznacznie przedstawiony w postaci $\omega_{2^p}^k\, r$, gdzie $k \in \{1, ..., 2^p\}$ oraz $r \in R$ ([20], Lemma 2.1), jak również, że 2^p-te selekcje pierwiastków istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy -1 nie jest 2^p-tą potęgą w F ([20], Theorem 2.4). Tym samym można zbudować niewielką teorię 2^p-tych selekcji pierwiastków równoległą do teorii porządków wyższych stopni, w której, w szczególności, rozważa się pytania o istnienie 2^p-tych selekcji pierwiastków, lub o rozszerzanie ciał wyposażonych w 2^p-te selekcje pierwiastków, lub o strukturę maksymalnych ciał 2^p-tych selekcji pierwiastków.

W pracy **[O3]** autor dodaje kolejny element do powyższej układanki i definiuje selekcje pierwiastków i 2^p-te selekcje pierwiastków dla hiperciał, a następnie bada które części teorii z przypadku ciał mogą być przeniesione na przypadek hiperciał. W celu możliwie zwartego przedstawienia otrzymanych rezultatów, podamy je od razu dla 2^p-tych selekcji pierwiastków otrzymując odpowiednie definicje i twierdzenia dla „zwykłych" selekcji pierwiastków jako przypadki szczególne. Następujący rezultat otwiera dyskusję w pracy **[O3]**:

Twierdzenie 3.9. *(**[O3]**, Lemma 2.1) Niech H będzie hiperciałem i załóżmy, że H zawiera 2^p-ty pierwiastek pierwotny z jedynki ω_{2^p}. Multyplikatywny homomorfizm ϕ grupy $H^{\times 2^p}$ niezerowych potęg stopnia 2^p w grupę $H^\times$ taki, że $\phi(c^{2^p})=\omega_{2^p}^k c$, dla pewnego $k\in\{1,...,2^p\}$, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje multyplikatywna podgrupa R grupy $H^\times$ taka, że dla każdego elementu $a \in H^\times$ istnieją jednoznacznie wyznaczony element $r \in R$ i liczba $k \in \{1,...,2^p\}$ takie, że $a = \omega_{2^p}^k r$.*

Multyplikatywną podgrupę R grupy $H^\times$ taką, że dla każdego elementu $a \in H^\times$ istnieją jednoznacznie wyznaczony element $r \in R$ i liczba $k \in \{1, ..., 2^p\}$ takie, że $a = \omega_{2^p}^k\, r$, będziemy nazywać 2^p*-tą selekcją pierwiastków*. W przypadku gdy $p = 1$ będziemy po prostu nazywać ją *selekcją pierwiastków*. Kwestię istnienia 2^p-tych selekcji pierwiastków rozstrzyga następujący, nieco bardziej ogólny, rezultat:

Twierdzenie 3.10. *(**[O3]**, Theorem 2.1) Niech H będzie hiperciałem i załóżmy, że H zawiera 2^p-ty pierwiastek pierwotny z jedynki ω_{2^p}. Niech $T \subset H^\times$ będzie pewnym zbiorem niezerowych elementów H. Wówczas 2^p-ta selekcja pierwiastków zawierająca zbiór T istnieje wtedy i tylo wtedy, gdy podgrupa $H^{\times 2^p}[T] < H^\times$ generowana przez T i grupę wszystkich 2^p-tych potęg nie zawiera elementu -1.*

Z powyższego wynika bezpośrednio warunek konieczny i wystarczający istnienia 2^p-tych selekcji pierwiastków:

Twierdzenie 3.11. *(**[O3]**, Theorem 2.2) Niech H będzie hiperciałem i załóżmy, że H zawiera 2^p-ty pierwiastek pierwotny z jedynki ω_{2^p}. Wówczas w H istnieje 2^p-ta selekcja pierwiastków wtedy i tylko wtedy, gdy H nie zawiera 2^p-tego pierwiastka z -1.*

W pozostałej części pracy **[O3]** autor zmierza do opisania analogii pomiędzy teorią selekcji pierwiastków wyższych rzędów a teorią Artina-Schreiera wyższego rzędu. Po pierwsze, można zaobserwować następujący rezultat:

Twierdzenie 3.12. *([O3], Proposition 3.1) Niech H będzie p-formalnie rzeczywistym hiperciałe, niech P będzie porządkiem dokładnego rzędu p. Wówczas H zawiera 2^p-ty pierwiastek pierwotny z 1 i $P^\times$ jest 2^p-tą selekcją pierwiastków.*

Stosunkowo bezpośrednim wniosekiem z Twierdzenia 3.10 jest następujące:

Twierdzenie 3.13. *([O3], Theorem 3.3) Niech H będzie hiperciałem i załóżmy, że H zawiera 2^p-ty pierwiastek pierwotny z jedynki ω_{2^p}. Niech $a \in H^\times$ i załóżmy, że H nie zawiera 2^p-tego pierwiastka z -1. Wówczas istnieje 2^p-ta selekcja pierwiastków R taka, że $a \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a^k \notin H^{\times 2^p}$, dla wszelkich $k \in \{1, ..., 2^p - 1\}$.*

W szczególności:

Twierdzenie 3.14. *([O3], Theorem 3.4) Niech H będzie hiperciałem i załóżmy, że H zawiera 2^p-ty pierwiastek pierwotny z jedynki ω_{2^p}. Niech $a \in H^\times$ i załóżmy, że H nie zawiera 2^p-tego pierwiastka z -1. Wówczas a należy do wszystkich 2^p-tych selekcji pierwiastków w H wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in H^{\times 2^p}$.*

Prace **[O1]** – **[O3]** zawierają szereg otwartych problemów w kierunku których mogą być prowadzone dalsze badania. Praca **[O3]** i pojęcie selekcji pierwiastków wydają się tu być szczególnie interesujące. W przypadku zwykłych ciał selekcje pierwiastków są przykładami podgrup R o indeksie 2 multyplikatywnej grupy $F^\times$ ciała F takich, że $-1 \notin R$. Znaczenie dowolnych podgrup indeksu 2 w geometrii zostało zaobserwowane już dawno temu przez Spernera [52] i odtąd często występują one pod nazwą *półporządków*. Autor niniejszego opracowania wyraża przekonanie, że selekcje pierwiastków w hiperciałach mogą odgrywać podobną rolę w rozwiniętej niedawno przez Juna [28] geometrii algebraicznej nad hiperciałami. Ten krąg pomysłów zostanie rozwinięty i omówiony w kolejnym artykule, nad którym autor aktualnie prowadzi prace.

4 Ciała przedstawialne i aksjomatyzacje form kwadratowych.

Już w połowie lat 70-tych algebraicy zajmujący się formami kwadratowymi podjęli próby badania teorii Witta z aksjomatycznego punktu widzenia – w rezultacie zrodziła się nową gałęź algebraicznej teorii form kwadratowych, a mianowicie aksjomatyczna teoria form kwadratowych. Obiekty takie jak schematy form kwadratowych Cordesa [14], [15], później badane też przez Carsona i Marshalla [9], Szczepanik [55], [54] i innych wzbudziły zainteresowanie matematyków zajmujących się tą dziedziną. Przez lata pojawiły się liczne inne aksjomatyzacje algebraicznej teorii form kwadratowych: bez wchodzenia w szczegóły techniczne, wspomnimy tu tylko o pojęciach takich jak odwzorowania kwaternionowe Carsona i Marshalla [9], abstrakcyjne pierścienie Witta badane przez Knebuscha, Rosenberga i Ware [31], [32], jak również przez Marshalla [41], silnie reprezentowalne pierścienie Witta autorstwa Kleinsteina i Rosenberga [30], czy też teoria grup specjalnych Dickmanna i Miraglii [18]. Schematy form kwadratowych, odwzorowania kwaternionowe, silnie reprezentowalne pierścienie Witta i grupy specjalne są równoważnymi opisami tego samego obiektu. Równoważne definicje schematów form kwadratowych zebrane są w pracy [36], gdzie dyskutowane są także zależności pomiędzy użytymi w nich aksjomatami, ale zasadniczo schemat form kwadratowych można postrzegać jako hiperciało H spełniające dwa dodatkowe warunki

i. $a^2 = 1$, dla wszelkich $a \in H^\times$, oraz

ii. jeśli $a \neq -1$, to wówczas $1 + a$ jest podgrupą grupy $H^\times$.

W szczególności, wobec **[E3]**, Proposition 3.2, hiperciało kwadratowe $Q(F)$ ciała F jest przykładem schematu form kwadratowych. Od czasu odkrycia wzmiankowanych powyżej aksjomatycznych teorii pozostaje otwartym pytanie czy nie są one zbyt ogólne – w języku używanym w niniejszym opracowaniu można je równoważnie sformułować następująco: czy istnieje hiperciało H spełniające dodatkowo warunki i. oraz ii. powyżej, które nie jest izomorficzne z żadnym kwadratowym hiperciałem $Q(F)$ dla dowolnego ciała F. Panuje powszechne przekonanie, że możliwe jest wskazanie takich przykładów i niektóre wysiłki zmierzające do ich znalezienia zostaną omówione w toku dalszej dyskusji. Z drugiej strony interesująca jest też kwestia jak wiele z rezultatów klasycznej algebraicznej teorii form kwadratowych można przenieść na grunt aksjomatyczny. W szczególności spektakularne postępy w teorii form kwadratowych takie jak rozwikłanie hipotezy Milnora przez Voevodskyego i krąg jego współpracowników nie mają swoich odpowiedników w teoriach abstrakcyjnych. W istocie wszystkie wzmiankowane powyżej teorie pozbawione są podstawowych narzędzi potrzebnych do atakowania podobnych problemów: brakuje, na przykład, rozwiniętej teorii niezmienników kohomologicznych abstrakcyjnych form kwadratowych.

W opinii autora istotną przyczyną takiego stanu rzeczy jest skomplikowany język używany w istniejących aksjomatyzacjach, jak również brak możliwości przeniesienia pojęć typowych dla teorii ciał do przypadku abstrakcyjnego: przykładowo, K-teoria Milnora bazuje silnie na arytmetyce ciała, dla którego jest definiowana, a ta, z kolei, w znacznej mierze gubi się przy podejściu aksjomatycznym. Z tych względów wydaje się pożądane poszukiwanie nowych aksjomatyzacji form kwadratowych, a praca **[P1]** jest pierwszym z nadchodzącej serii artykułów poświęconych takim poszukiwaniom. Autorzy proponują w niej nowy sposób aksjomatyzowania form kwadratowych wychodzący od pojęcia częściowego porządku spełniającego pewne dodatkowe własności. Służy temu wprowadzenie pojęcia *przedstawialnego częściowego porządku*. W pewnym przybliżeniu aksjomaty przedstawialnego porządku odpowiadają zachowaniu zbioru potęgowego z wyróżnionym jednym elementem i uporządkowanego przez inkluzję, w którym wszystkie elementy są supremami niepustych rodzin zbiorów jednoelementowych, zaś główny pomysł polega na zbudowaniu aksjomatycznej teorii form kwadratowych wychodząc od opisu zachowania zbiorów wartości form kwadratowych. Poniżej przedstawimy go bardziej szczegółowo.

4.1 Praca [P1].

Niech A będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Będziemy pisać $\bigsqcup X$ dla oznaczenia supremum podzbioru $X \subseteq A$ oraz $x \sqcup y$ dla oznaczenia $\bigsqcup \{x,\ y\}$. Niech $\mathcal{S}_A$ będzie zbiorem elementów minimalnych A. Będziemy pisać $\mathcal{S}_a \overset{\text{def.}}{=} \downarrow a \cap \mathcal{S}_A$ dla oznaczenia zbioru elementów minimalnych leżących poniżej $a \in A$ oraz $\mathcal{S}_X \overset{\text{def.}}{=} \bigcup_{x\in X} \mathcal{S}_x$ dla oznaczenia zbioru elementów minimalnych leżących poniżej podzbioru $X \subseteq A$. Częściowy porządek $(A, \leqslant)$ nazywamy *przedstawialnym*, jeżeli

i. każdy niepusty podzbiór $X \subseteq A$ ma supremum;

ii. $\mathcal{S}_a$ jest niepusty i $a = \bigsqcup \mathcal{S}_a$ dla każdego $a \in A$;

iii. każdy element minimalny $s \in \mathcal{S}_A$ jest *zwarty* w następującym sensie: jeśli $Y \subseteq A$ jest niepustym podzbiorem oraz $s \leqslant \bigsqcup Y$, to wówczas istnieje element $y \in Y$ taki, że $s \leq y$.

Elementy minimalne przedstawialnego porządku będziemy nazywać *superkompaktami*. Autorzy pracy zdefiniowali przedstawialne monoidy, grupy, pierścienie i ciała: *przedstawialny monoid* $(M, \leq, 0, +)$ jest przedstawialnym porządkiem $(M, \leq, 0)$ z wyróżnionym superkompaktem 0 i zachowującym suprema dodawaniem $+: M \times M \to M$ takim, że

i. $a + (b + c) = (a + b) + c$ dla wszystkich $a, b, c \in M$;

ii. $a + 0 = 0 + a = a$ dla wszystkich $a \in M$;

iii. $a + b = b + a$ dla wszystkich $a, b \in M$.

Przedstawialna grupa G jest to przedstawialny monoid wyposażony w zachowujący supema inwolutywny homomorfizm $-: G \to G$ zwany *odwracaniem*, który spełnia warunek

$$(s \leq t + u) \Rightarrow (t \leq s + (-u))$$

dla wszystkich superkompaktów $s, t, u \in \mathcal{S}_G$. *Przedstawialny pierścień* jest to przedstawialna grupa $(R, \leq, 0, +, -)$ składająca się z co najmniej 2 elementów, na której określony jest też przemienny monoid $(R, \cdot, 1)$ taki, że $1 \in R$ jest superkompaktem, $\cdot$ jest zgodne z $\leq$ (tzn. $a \leq$ b pociąga $a \cdot c \leq b \cdot c$, dla wszystkich $a, b, c \in R$) oraz $-$ (tzn.. $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$, dla wszystkich $a, b \in R$), rozdzielne względem $+$ i takie, że $0 \cdot a = 0$, dla wszystkich $a \in R$, oraz

$$\mathcal{S}_{a \cdot b} = \{s \cdot t | s \in \mathcal{S}_a, t \in \mathcal{S}_b\}$$

dla wszystkich $a, b \in R$. Przedstawialny pierścień R taki, że $\mathcal{S}_R^* = \mathcal{S}_R \setminus \{0\}$ jest multyplikatywną grupą będziemy nazywali *przedstawialnym ciałem*.

Zbiory potęgowe (z wyłączeniem podzbioru pustego) grup przemiennych, przemiennych pierścieni z jedynką lub ciał uporządkowane przez inkluzję są przykładami przedstawialnych grup, pierścieni i ciał (**[P1]**, Examples 4, 14, and 18). Podobnie zbiory potęgowe hipergrup, multipierścieni i hiperciał są przykładami przedstawialnych grup, pierścieni i ciał (**[P1]**, Examples 16 and 21).

Głównym celem pracy jest skonstruowanie pierścieni Witta odpowiednio dobranych przedstawialnych ciał. Z tego powodu autorzy nazywają przedstawialne ciało R ciałem *pra-kwadratowo przedstawialnym* jeżeli dodatkowo spełnia następujące własności:

i. $a \leq a + b$ dla wszystkich $a \in \mathcal{S}_R^*, b \in \mathcal{S}_R$;

ii. $(a \leq 1 - b) \wedge (a \leq 1 - c) \Rightarrow (a \leq 1 - b\, c)$ dla wszystkich $a, b, c \in \mathcal{S}_R$;

iii. $a^2 = 1$ dla wszystkich $a \in \mathcal{S}_R \setminus \{0\}$.

Przykładem pra-kwadratowo przedstawialnego ciała jest zbiór potęgowy hiperciała kwadratowego danego ciała (**[P1]**, Proposition 28). Dalej, *formą* nad pra-kwadratowo przedstawialnym ciałem R nazywamy formalną n-kę $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ elementów zbioru $\mathcal{S}_R^*$. Relacja $\cong$ *izometrii* form takiego samego wymiaru zdefiniowana jest przez indukcję w następujący sposób:

- $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$;
- $\langle a_1, a_2 \rangle \cong \langle b_1, b_2 \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1\, a_2 = b_1\, b_2$ oraz $b_1 \leq a_1 + a_2$;
- $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \cong \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $x, y, c_3, \ldots, c_n \in \mathcal{S}_R^*$ takie, że

    i. $\langle a_1, x \rangle \cong \langle b_1, y \rangle$;

    ii. $\langle a_2, \ldots, a_n \rangle \cong \langle x, c_3, \ldots, c_n \rangle$;

    iii. $\langle b_2, \ldots, b_n \rangle \cong \langle y, c_3 \ldots, c_n \rangle$.

Relacja $\cong$ jest równoważnością w zbiorze wszystkich form unarnych i binarnych pra-kwadratowo przedstawialnego ciała R (**[P1]**, Proposition 31), zaś jeżeli okazuje się być równoważnością w zbiorze form dowolnego wymiaru, to R nazywamy ciałem *kwadratowo przedstawialnym*. Przykładem ciała kwadratowo przedstawialnego jest zbiór potęgowy hiperciała kwadratowego pewnego ciała (**[P1]**, Example 33).

Niech $\phi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ i $\psi = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle$ będą dwiema formami. be two forms. *Sumę ortogonalną* $\phi \oplus \psi$ definiujemy jako formę

$$\langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \rangle$$

zaś *iloczyn tensorowy* $\phi \otimes \psi$ jako

$$\langle a_1 b_1, ..., a_1 b_m, a_2 b_1, ..., a_2 b_m, ..., a_n b_1, ..., a_n b_m \rangle$$

Będziemy pisali $k \times \phi$ dla oznaczenia formy $\underbrace{\phi \oplus ... \oplus \phi}_{k\, times}$.

Twierdzenie 4.1. *(**[P1]**, Proposition 35)*

1. *Niech R będzie pra-kwadratowo przedstawialnym ciałem. Suma ortogonalna i iloczyn tensorowy izometrycznych form są izometryczne.*

2. *(twierdzenie Witta o skracaniu) Niech R będze kwadratowo przedstawialnym ciałem. Jeśli $\phi_1 \oplus \psi \cong \phi_2 \oplus \psi$, to $\phi \cong \psi$.*

Dwie formy ϕ i ψ będziemy nazywać *równoważnymi w sensie Witta* i oznaczać przez $\phi \sim \psi$, jeśli dla pewnych liczb naturalnych $m, n \geq 0$:

$$\phi \oplus m \times \langle 1, -1 \rangle \cong \psi \oplus n \times \langle 1, -1 \rangle$$

Można łatwo sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze form nad R zgodną z izometrią. Również nie jest trudno się przekonać, że równoważność w sensie Witta jest kongruencją względem sumy ortogonalnej i iloczynu tensorowego. Oznaczmy przez $W(R)$ zbiór klas równoważności w sensie Witta form nad R i przez $\bar{\phi}$ klasę równoważności formy ϕ. Wraz z działaniami

$$\bar{\phi} + \bar{\psi} = \overline{\phi \oplus \psi} \qquad \bar{\phi} \cdot \bar{\psi} = \overline{\phi \otimes \psi}$$

$W(R)$ jest pierścieniem przemiennym, którego zerem jest klasa równoważności $\overline{\langle 1, -1 \rangle}$, a jedynką klasa równoważności $\overline{\langle 1 \rangle}$. Tak jak się można spodziewać, $W(R)$ będziemy nazywać *pierścieniem Witta* kwadratowo przedstawialnego ciała R i, jak również można się spodziewać, tak skonstruowany pierścień Witta zbioru potęgowego kwadratowego hiperciała ciała F jest izomorficzny ze zwykłym pierścieniem Witta ciała F:

Twierdzenie 4.2. *(**[P1]**, Theorem 39) Dla ciała F pierścień $W(\mathcal{P}^*(Q(F)))$ jest po prostu pierścieniem Witta $W(F)$ niezdegenerowanych symetrycznych form dwuliniowych nad F.*

Tak jak wspominaliśmy powyżej, praca **[P1]** jest dopiero pierwszą z nadchodzącej serii poświęconej aksjomatyzacji form kwadratowych za pomocą przedstawialnych porządków. W chwili obecnej autor pracuje nad zbadaniem podstawowych własności kategoryjnych przedstawialnych algebr, w szczególności nad zbudowaniem narzędzi potrzebnych do rozwinięcia wersji algebry homologicznej nad przedstawialnymi strukturami. Jest to zadanie raczej delikatne, albowiem trudne do pokonania przeszkody pojawiają się już na etapie definiowania pojęć takich jak ciągi dokładne przedstawialnych monoidów: w szczególności, brakuje tu czytelnej charakteryzacji monomorfizmów poprzez ich jądra.

Równolegle autor kontynuuje poszukiwania nowych przykładów struktur, które można opisać za pomocą przedstawialnych porządków. W szczególności, hiperciała dostarczają wygodnego narzędzia w studiowaniu struktur rozmytych, autor zaś uważa, że ich zastąpienie przez przedstawialne ciała powinno doprowadzić do uproszczenia znanych już rezultatów i uzyskania kolejnych.

5. Inne osiągnięcia naukowe.

Poniżej podajemy i pokrótce omawiamy pozostałe osiągnięcia naukowe autora nie będące elementami cyklu składającego się na jednolite osiągnięcie naukowe. Są one podzielone na cztery grupy. Prace **[PP1]** – **[PP4]** związane są z pp hipotezą w teorii przestrzeni porządków i większość z nich stanowiła podstawę rozprawy doktorskiej autora. Prace **[SO1]** – **[SO3]** tworzą serię poświęconą badaniom struktury przestrzeni porządków. Praca **[SL1]** jest owocem wspólnego z Karimem Becherem projektu zajmującego się związkami między długością symboli a indeksem stabilności, wreszcie praca **[FP1]** dowodzi dwóch twierdzeń z niedawno wprowadzonego nowego typu twierdzeń o punktach stałych.

5a. Lista publikacji.

[PP1]. P. Gładki, M. Marshall, *The pp conjecture for spaces of orderings of rational conics*, J. Algebra Appl. **6** (2007), 245 – 257.

[PP2]. P. Gładki, M. Marshall, *The pp conjecture for the space of orderings of the field* $\mathbb{R}(x, y)$, J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), 197 – 203.

[PP3]. P. Gładki, M. Marshall, *On families of testing formulae for a pp formula,* in Quadratic Forms – Algebra, Arithmetic, and Geometry, 181 – 188, Contemp. Math. **493**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[PP4]. P. Gładki, *A note on the pp conjecture for sheaves of spaces of orderings,* Commun. Math. **24** (2016), 1 – 5.

[SO1]. P. Gładki, B. Jacob, *On profinite spaces of orderings,* J. Pure Appl. Algebra **216** (2012), 2608 – 2613.

[SO2]. P. Gładki, B. Jacob, *On quotients of the space of orderings of the field* $\mathbb{Q}(x)$, in Algebra, Logic and Number Theory, 63 – 84, Banach Center Publ. **108**, Inst. Math., Polish Acad. Sci., Warszawa, 2016.

[SO3]. P. Gładki, M. Marshall, *Quotients of index two and general quotients in a space of orderings*, Fund. Math. **229** (2015), 255 – 275.

[SL1]. P. Gładki, K. Becher, *Symbol length and stability index*, J. Algebra **354** (2012), 71 – 76.

[FP1]. P. Gładki, *A note on Kuhlmann's fixed point theorems*, Fixed Point Theory **18** (2017), 565 – 568.

5b. Omówienie powyższych prac i uzyskanych rezultatów.

Spis treści

5 PP hipoteza w teorii przestrzeni porządków.

Przestrzenie porządków pojawiły się już w niniejszym omówieniu w dyskusji między liniami: dla formalnie rzeczywistego ciała F rozważmy właściwy praporządek T. Zauważmy, że $T^\times$ jest podgrupą multyplikatywnej grupy $F^\times$ ciała F, albowiem jeśli $t \in T^\times$, to $\frac{1}{t} = \left(\frac{1}{t}\right)^2 t \in T^\times$. Oznaczmy $G_T = F^\times / T^\times$. Para (X_T, G_T) jest przykładem przestrzeni porządków.

G_T można naturalnie identyfikować z podgrupą grupy $\{-1,1\}^{X_T}$ wszystkich funkcji z X_T do $\{-1, 1\}$, z mnożeniem zdefiniowanym po wartościach: element $a \in F^\times$ indukuje funkcję $X_T \ni P \mapsto a(P) \in \{-1,1\}$, gdzie

$$a(P) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } a \in P \\ -1, & \text{gdy } a \in -P. \end{cases}$$

Odpowiedniość ta jest homomorfizmem z jądrem równym $T^\times$.

Przestrzenią porządków nazwiemy parę (X, G), gdzie X jest niepustym zbiorem, zaś G podgrupą $\{-1,1\}^X$ zawierającą funkcję stale równą -1 i spełniającą następujące trzy aksjomaty. Po pierwsze:

i. $\forall x, y \in X\, [(x \neq y) \Rightarrow \exists a \in G\, (a(x) \neq a(y))]$.

Elementy X możemy postrzegać jako charaktery grupy G: naturalne zanurzenie X w grupę charakterów $\chi(G)$ otrzymujemy przez identyfikację elementu $x \in X$ z charakterem $a \mapsto a(x)$. Formami kwadratowymi w ujęciu przestrzeni porządków nazywać będziemy formalne n-ki elementów grupy G, zaś jeśli $a, b \in G$, definiujemy zbiór wartości $D(a,b)$ następująco:

$$D(a,b) = \{c \in G \colon \forall x \in X\, (c(x) = a(x) \vee c(x) = b(x))\}.$$

Po powyższych uwagach możemy wysłowić pozostałe dwa aksjomaty:

ii. Jeśli $x \in \chi(G)$ spełnia warunek $x(-1) = -1$ i jeśli

$$\forall a, b \in \ker x \;\; (D(a,b) \subset \ker x),$$

to x zawiera się w obrazie naturalnego zanurzenia $X \hookrightarrow \chi(G)$.

iii. Dla $a_1, a_2, a_3 \in G$, jeśli $b \in D(a_1, c)$ dla pewnego $c \in D(a_2, a_3)$, to $b \in D(d, a_3)$ dla pewnego $d \in D(a_1, a_2)$.

W X wprowadzamy naturalną topologię, zwaną *topologią Harrisona*, jako najsłabszą topologię w której funkcje $a \colon X \to \{-1,1\}$, $a \in G$, są ciągłe, przy założeniu, że $\{-1,1\}$ jest wyposażony w topologię dyskretną. Innymi słowy, zbiory

$$U(a) = \{x \in X \colon a(x) = 1\}, \qquad a \in G,$$

są domknięto-otwarte i tworzą podbazę topologii w X, zaś zbiory

$$U(a_1, ..., a_n) = \bigcap_{i=1}^{n} U(a_i)$$

tworzą jej bazę. Podzbiór $Y \subset X$ będzie nazywany *podprzestrzenią* przestrzeni (X, G), jeśli Y daje się wyrazić w postaci $\bigcap_{a \in S} U(a)$ dla pewnego, niekoniecznie skończonego, podzbioru $S \subset G$. Dla dowolnej podprzestrzeni Y będziemy oznaczać przez $G|_Y$ grupę wszystkich zwężeń $a|_Y$, $a \in G$. Nie jest zaskoczeniem, że para $(Y, G|_Y)$ sama jest przestrzenią porządków. *Indeksem stabilności* (X, G), oznaczanym przez $\mathrm{stab}(X, G)$, nazywać będziemy najmniejszą liczbę k o tej własności, że dowolny zbiór bazowy $V \subset X$ (w topologii Harrisona) daje się wyrazić jako $V = U(a_1, ..., a_k)$ dla pewnych $a_1, ..., a_k \in G$.

Przypomnijmy, że formuła pierwszego rzędu w języku L z parametrami $\underline{a} = (a_1, ..., a_k)$ nazywana jest *dodatnio pierwotną* (w skrócie *pp formułą*, od ang. *positive primitive*), jeżeli jest postaci $\exists \underline{t} \Psi(\underline{t}, \underline{a})$, gdzie $\underline{t} = (t_1, ..., t_n)$, oraz $\Psi(\underline{t}, \underline{a})$ jest skończoną koniunkcją formuł atomowych. Dla przestrzeni porządków (X, G) pp formuła $P(\underline{a})$ z n kwantyfikatorami i k parametrami w G przyjmuje postać

$$\exists \underline{t} \bigwedge_{j=1}^{m} p_j(\underline{t}, \underline{a}) \in D(1, q_j(\underline{t}, \underline{a})),$$

gdzie $\underline{t} = (t_1, ..., t_n)$, $\underline{a} = (a_1, ..., a_k)$, dla $a_l \in G$, $l \in \{1, ..., k\}$, oraz $p_j(\underline{t}, \underline{a})$, $q_j(\underline{t}, \underline{a})$ są $\pm$ iloczynami pewnych t_i i a_l, $i \in \{1, ..., n\}$, $l \in \{1, ..., k\}$. Liczne ważne pojęcia w teorii przestrzeni porządków dają się wyrazić poprzez pp formuły, w szczególności takie jak „dwie formy są izometryczne" albo „element jest reprezentowany przez formę". Załóżmy, że $P(\underline{a})$ jest pp formułą z jednego z tych dwóch przykładów. W obydwu przypadkach prawdziwa jest następująca „zasada lokalno-globalna": jeżeli $P(\underline{a})$ jest spełniona w dowolnej skończonej podprzestrzeni (X, G), to $P(\underline{a})$ jest spełniona w całej przestrzeni (X, G) (gdy mówimy o formule $P(\underline{a})$ w podprzestrzeni Y, to mamy na myśli formułę otrzymaną z $P(\underline{a})$ przez zamianę każdego z atomów $p \in D(1, q)$ atomem $p|_Y \in D_Y(1, q|_Y)$). W świetle powyższych obserwacji nasuwa się następujące naturalne pytanie, znane jako *pp hipoteza*:

Czy dla dowolnej przestrzeni porządków (X, G) prawdą jest, że jeżeli pp formuła $P(\underline{a})$ z parametrami $\underline{a}$ w G jest spełniona w każdej skończonej podprzestrzeni (X, G), to jest też spełniona w (X, G)?

Seria prac **[PP1], [PP2], [PP3]** i **[PP4]** zajmuje się pp hipotezą w różnych przykładach przestrzeni porządków. Poniżej omówimy je bardziej szczegółowo.

5.1 Praca [PP1].

Prace **[PP1], [PP2], [PP3]** złożyły się na rozprawę doktorską autora. Pierwsza z nich, **[PP1]**, jest być może najbardziej interesująca i dostarcza negatywnego rozstrzygnięcia pp hipotezy poprzez wskazanie konkretnej przestrzeni porządków wraz z formułą, która jest spełniona w każdej jej podprzestrzeni, ale w ogólności okazuje się fałszywa. Dokładniej, udowodnione jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.1. *(**[PP1]**, Theorem 6) Niech $(X_{\sum F^2}, G_{\sum F^2})$ będzie przestrzenią porządków ciała F funkcyjnego krzywej stożkowej $\mathcal{C}$: $ax^2 + by^2 + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, gdzie $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, która nie zawiera żadnych punktów o współrzędnych wymiernych. Wówczas istnieje pp formuła, która zachodzi w dowolnej skończonej podprzestrzeni przestrzeni $(X_{\sum F^2}, G_{\sum F^2})$, ale nie zachodzi w $(X_{\sum F^2}, G_{\sum F^2})$.*

Rozważana pp formuła jest dana *explicite*. Niech $\mathcal{C}: ax^2 + by^2 + c = 0$ będzie krzywą stożkową taką, jak w Twierdzeniu 5.1 (weźmy, na przykład, $x^2 + y^2 - 3 = 0$) i rozważmy sześć nierozkładalnych elementów $p_1, \ldots, p_6$ pierścienia współrzędnych krzywej $\mathcal{C}$ indukowanych z wielomianów liniowych, które przecinają się z $\mathcal{C}$ tak, jak na następującym obrazku:

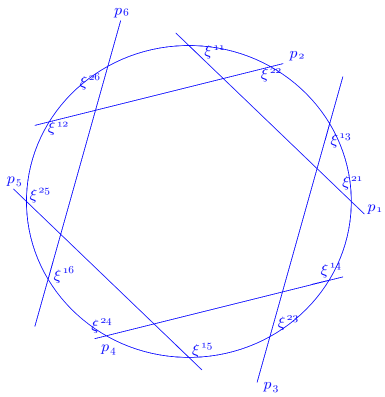


Fig. 1

Niech ξ^{1i}, ξ^{2i} oznaczają dwa rzeczywiste punkty przecięcia p_i z $\mathcal{C}$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$, uporządkowane tak, jak powyżej. Zamieniając ewentualnie p_i przez $-p_i$ możemy założyć, iż każdy z p_i jest dodatni w początku układu współrzędnych. Niech $a_1 = p_1\, p_6$, $a_2 = p_1\, p_4$, $d = -p_1\, p_2\, p_3\, p_5$. PP formuła służąca jako kontrprzykład do pp hipotezy wygląda następująco:

$$P(\underline{a}) = \exists t_1 \exists t_2\, (t_1 \in D(1, a_1) \wedge t_2 \in D(1, a_2) \wedge d\, t_1\, t_2 \in D\,(1, a_1\, a_2)).$$

Dowód jest bardzo techniczny i dość skomplikowany. Ponadto, odpowiednio modyfikując powyższy przykład, można pokazać, że pp hipoteza nie jest spełniona także w przestrzeni porządków ciała funkcyjnego dwóch prostych równoległych bez punktów o współrzędnych wymiernych:

Twierdzenie 5.2. *(**[PP1]**, Theorem 9) Niech $(X_{\sum F^2}, G_{\sum F^2})$ będzie przestrzenią porządków ciała funcyjnego F krzywej stożkowej $\mathcal{C}$: $x^2 + c = 0$, $c \in \mathbb{Q}$, gdzie $c < 0$, która nie zawiera punktów o współrzędnych wymiernych. Wówczas istnieje pp formuła, która jest spełniona w każdej skończonej podprzestrzeni $(X_{\sum F^2}, G_{\sum F^2})$, ale nie jest spełniona w $(X_{\sum F^2}, G_{\sum F^2})$.*

Dla każdej przestrzeni porządków ciała funkcyjnego krzywych stożkowych innych niż wymienione w Twierdzeniach 5.2 i 5.2 pp hipoteza jest spełniona. Tym samym praca **[PP1]** dostarcza kompletnej klasyfikacji krzywych stożkowych ze względu na pp hipotezę.

5.2 Praca [PP2].

Jest to kontynuacja pracy **[PP1]**. Główne twierdzenie jest następujące:

Twierdzenie 5.3. *(**[PP2]**, Theorem 1) PP hipoteza jest fałszywa dla przestrzeni porządków $(X_{\sum F^2}, G_{\sum F^2})$ ciała $F = \mathbb{R}(x, y)$.*

PP formuła dla której pp hipoteza nie zachodzi jest podana bezpośrednio, a technika dowodu przypomina tę z Twierdzenia 5.2. Dla $\epsilon > 0$ rozważmy podprzestrzenie

$$X_\epsilon = U\,(x^2 + y^2 - 1) \cap U\,(1 + \epsilon - x^2 - y^2)$$

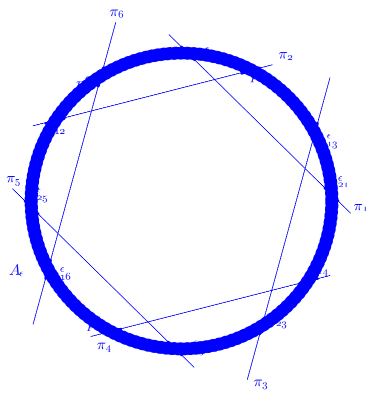
i niech $G_\epsilon = G_{\sum \mathbb{R}(x,y)^2}|_{X_\epsilon}$. Zdefiniujmy podprzestrzeń

$$X = \bigcap_{\epsilon > 0} X_\epsilon$$

i niech $G = G_{\sum \mathbb{R}(x,y)^2}|_X$. Można pokazać, że wystarczy udowodnić, iż pp hipoteza nie zachodzi w przestrzeni (X, G). Dla $\epsilon > 0$ oznaczmy

$$A_\epsilon = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 < a^2 + b^2 < 1 + \epsilon\}$$

i niech π_1, ..., $\pi_6 \in \mathbb{R}(x,\ y)$ będą elementami nierozkładalnymi indukowanymi z wielomianów liniowych, które dla odpowiednio dużych ϵ przecinają się z A_ϵ tak, jak na poniższym obrazku:



Tutaj $p_{1i}^\epsilon, p_{2i}^\epsilon$ oznaczają dwie składowe spójne zbioru $\mathcal{Z}(\pi_i) \cap A_\epsilon$, $i \in \{1, ..., 6\}$, $\epsilon > 0$, i są położone tak, jak na powyższej ilustracji, gdzie $\mathcal{Z}(\pi_i)$ jest zbiorem rzeczywistych zer π_i. Zastępując ewentualnie π_i przez $-\pi_i$ możemy założyć, że każdy π_i jest dodatni w zerze. Dla dwóch sąsiadujących segmentów $p_{i_1 j_1}^\epsilon$ i $p_{i_2 j_2}^\epsilon$, $i_1, i_2 \in \{1, 2\}$, $j_1, j_2 \in \{1, ..., 6\}$, oznaczmy przez $A_n^{i_1 j_1, i_2 j_2}$ sektor zaczynający się w $p_{i_1 j_1}^\epsilon$ i, przy założeniu, że poruszamy się wzdłuż A_ϵ zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, kończący w $p_{i_2 j_2}^\epsilon$.

Niech $a_1 = \pi_1 \pi_6$, $a_2 = \pi_1 \pi_4$ i $d = -\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_5$. Rozważmy następującą pp formułę

$$P(a_1, a_2, d) = \exists t_1 \exists t_2 \, (t_1 \in D(1, a_1) \wedge t_2 \in D(1, a_2) \wedge d\, t_1 t_2 \in D\,(1, a_1 a_2)).$$

Dowód twierdzenia polega teraz na wykazaniu, że $P(a_1, a_2, d)$ nie zachodzi w (X, G).

5.3 Praca [PP3].

W tej pracy, dla danej pp formuły $P(\underline{y})$, zdefiniowana zostaje specjalna rodzina formuł $\mathcal{F}_P$, którą można użyć celem przetestowania, czy dana pp formuła zachodzi dla wszystkich skończonych podprzestrzeni danej przestrzeni porządków. Pracujemy z ustaloną pp formułą

$$P(\underline{y}) = \exists \underline{t} \bigwedge_{j=1}^{m} \theta_j(\underline{t}, \underline{y}),$$

gdzie θ_j są formułami atomowymi, zaś $\underline{y} = (y_1,\ ...,\ y_k)$, $\underline{t} = (t_1,\ ...,\ t_n)$ są formalnymi ciągami zmiennych. Oznaczmy

$\mathbb{K}_P = \{(Y,\ H,\ \underline{b})|\ (Y,\ H)$ jest skończoną podprzestrzenią, $\underline{b} \in H^k$, $P(\underline{b})$ nie zachodzi w $(Y,\ H)$ i zachodzi w każdej właściwej podprzestrzeni $(Y, H)\}$.

Niech $\underline{x} = (x_1, ..., x_l)$ będzie ciągiem zmiennych wolnych. Budujemy nową formułę $P_l(\underline{y}, \underline{x})$ stosując indukcję względem l. Jeśli $l = 1$, definiujemy $P_1(\underline{y}, x_1)$ zamieniając każdą formułę atomową $z_1 \in D(z_2, z_3)$ występującą w $P(\underline{y})$ przez

$$\exists s_1 \exists s_2\, [(s_1 \in D(1, x_1)) \wedge (s_2 \in D(1, x_1)) \wedge (z_1 \in D\,(s_1 z_2, s_2 z_3))].$$

Jeśli $l \geq 2$, definiujemy $P_l(\underline{y},(x_1,...,x_l))$ wykonując powyższą operację na $P_{l-1}(\underline{y},(x_1,...,x_{l-1}))$.

Sprawdzamy, że dla każdej przestrzeni porządków $(X,\, G)$ i dla każdej podprzestrzeni postaci $U(b_1,...,b_l)$, $b_1,...,b_l \in G$, jeśli $\underline{a} \in G^k$ to $P_l(\underline{a},\underline{b})$ zachodzi w (X,G) wtedy i tylko wtedy, gdy $P(\underline{a})$ zachodzi w podprzestrzeni $U(b_1,...,b_l)$.

Niech $\lambda \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Konstruujemy ciąg formuł $P_\lambda^{(i)}(\underline{y})$, $i \geq 0$, stosując indukcję względem i. Dla $i=0$ definiujemy $P_\lambda^{(0)}(\underline{y}) = P(\underline{y})$. Dla $i=1$, definiujemy

$$P_\lambda^{(1)} = \exists z_0 ... \exists z_\lambda \bigwedge_{j=1}^{\lambda} [(z_{j-1} \in D(1, z_j)) \wedge P_1(\underline{y}, z_{j-1} z_j)],$$

zaś dla $i \geq 2$ definiujemy $P_\lambda^{(i)}(\underline{y})$ wykonując powyższą operację na $P_\lambda^{(i-1)}(\underline{y})$ zamiast na $P(\underline{y})$. Zauważmy, że konstrukcja ta zależy od liczby λ.

Trywialnie, dla każdej przestrzeni porządków $(X,\, G)$ i każdych $\underline{a} \in G^k$, $P(\underline{a}) \Rightarrow P_\lambda^{(1)}(\underline{a})$ (biorąc $z_0 = z_1 = ... = z_\lambda = 1$) i w konsekwencji $P(\underline{a}) \Rightarrow P_\lambda^{(1)}(\underline{a}) \Rightarrow ... \Rightarrow P_\lambda^{(i)}(\underline{a})$.

Zdefiniujmy liczbę

$$c_P = \max \{\mathrm{cl}(X,G) \colon (X,G,\underline{a}) \in \mathbb{K}_P\},$$

gdzie $\mathrm{cl}(X,\, G)$ oznacza *długość łańcuchową* przestrzeni $(X,\, G)$, czyli największą liczbę d taką, że istnieje ciąg $U(a_0) \subsetneq U(a_1) \subsetneq ... \subsetneq U(a_d)$, a_0, a_1, ..., $a_d \in G$, lub ∞ jeżeli nie istnieje taka skończona liczba. Można sprawdzić, że c_P jest dobrze określona. Głównym rezultatem w **[PP3]** jest następujące:

Twierdzenie 5.4. *(**[PP3]**, Theorem 2) Niech $\lambda > c_P$, niech (X,G) będzie przestrzenią porządków, niech $\underline{a} \in G^k$. Następujące dwa warunki są równoważne:*

1. *$P(\underline{a})$ nie jest spełniona w pewnej skończonej podprzestrzeni (X,G);*

2. *dla dowolnych $i \geq 0$ formuła $\neg P_\lambda^{(i)}(\underline{a})$ jest spełniona w (X,G).*

Praca zawiera też konkretny przykład ilustrujący w jaki sposób powyższe formuły są konstruowane, bazujący na pp formule wykorzystanej w obaleniu pp hipotezy (**[PP3]**, Example 1).

5.4 Praca [PP4].

Jako ostatnią pracę zajmującą się tematyką pp hipotezy, autor opublikował miniaturową notkę **[PP4]** zawierającą jeden zgrabny rezultat. Jakkolwiek pp hipoteza została obalona we wcześniejszych pracach, nadal jest ciekawe badanie przykładów przestrzeni w jakich jest spełniona. Jednym z takich przykładów jest snop przestrzeni porządków: załóżmy, że $(X_i,\, G_i)$ są przestrzeniami porządków dla wszelkich $i \in I$, gdzie I jest przestrzenią boole'owską. Załóżmy następnie, że $X = \dot{\cup}_{i \in I} X_i$, czyli rozłączna suma zbiorów X_i's, jest wyposażona w topologię taką, że

i. X jest przestrzenią,

ii. inkluzja $\iota_i \colon X_i \hookrightarrow X$ jest ciągła dla każdego $i \in I$,

iii. rzutowanie $\pi \colon X \to I$ jest ciągłe

iv. jeśli $(i_\lambda)_{\lambda \in D}$ jest ciągiem uogólnionym w I zbieżnym do $i \in I$ oraz jeśli $\sigma_1^\lambda, \sigma_2^\lambda, \sigma_3^\lambda, \sigma_4^\lambda$ jest 4-elementowym wachlarzem w X_{i_λ} takim, że σ_j^λ jest zbieżny do $\sigma_j \in X_i$ dla wszystkich $j=1$, $2, 3, 4$, to wówczas $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 = 1$.

Tutaj *wachlarzem* nazywamy parę (X, G), gdzie G jest grupą o wykładniku 2 i zawierającą wyróżniony element -1, zaś X jest zbiorem wszystkich charakterów x grupy G takich, że $x(-1) = -1$.

Ponadto niech

$$G := \{\phi \in \mathrm{Cont}(X, \{\pm 1\}) \colon \phi|_{X_i} \in G_i \,\forall\, i \in I\}$$

gdzie G_i identyfikujemy z jej obrazem w $\mathrm{Cont}(X_i, \{\pm 1\})$, $i \in I$, poprzez naturalne zanurzenie. Wówczas (X, G) jest przestrzenią porządków nazywaną *snopem* przestrzeni (X_i, G_i) nad przestrzenią boole'owską I. Głównym rezultatem pracy **[PP4]** jest następujące:

Twierdzenie 5.5. *(**[PP4]**, Theorem 1) Jeśli pp hipoteza zachodzi w (X_i, G_i), dla wszelkich $i \in I$, to zachodzi również w snopie (X, G) przestrzeni (X_i, G_i) nad przestrzenią boole'owską I.*

Twierdzenie to zostało już wcześniej udowodnione przez Astiera [5] przy użyciu raczej zaawansowanych narzędzi z teorii modeli, podczas gdy dowód przedstawiony w **[PP4]** jest bardzo elementarny.

6 Struktura przestrzeni porządków.

Seria prac **[SO1]**, **[SO2]** i **[SO3]** zajmuje się badaniem granic odwrotnych i ilorazów przestrzeni porządków. Zacznijmy od wyjaśnienia tych pojęć. Przez *morfizm* przestrzeni (X_1, G_1) w przestrzeń (X_2, G_2) będziemy rozumieć funkcję $F \colon X_1 \to X_2$ taką, że

$$\forall b \in G_2 \, (b \circ F \in G_1).$$

Morfizm $F \colon (X_1, G_1) \to (X_2, G_2)$ definiuje homomorfizm grup $F^* \colon G_2 \to G_1$ dany wzorem $F^*(b) = b \circ F$, który spełnia dodatkowo warunek

$$\forall b_1, b_2, b_3 \in G_2 \, [(b_1 \in D_{X_2}(b_2, b_3)) \Rightarrow (F^*(b_1) \in D_{X_1}(F^*(b_2), F^*(b_3)))].$$

Bijektywny morfizm będziemy nazywać *izomorfizmem* i oznaczać $(X_1, G_1) \cong (X_2, G_2)$, jeśli dwie przestrzenie będą izomorficzne.

Systemem odwrotnym przestrzeni porządków nazywamy trójkę złożoną ze:

i. skierowanego zbioru $(I, \succeq)$,

ii. przestrzeni porządków (X_i, G_i), $i \in I$, oraz

iii. morfizmów $F_{ij} \colon (X_i, G_i) \to (X_j, G_j)$ zdefiniowanych dla $i \succeq j$, $i, j \in I$, takich, że

   (a) $F_{ij}(X_i) = X_j$, co pociąga, że $F_{ij}^* \colon G_j \to G_i$ jest injektywny, oraz

   (b) $F_{ik} = F_{jk} \circ F_{ij}$, dla $i \succeq j \succeq k$, $i, j, k \in I$.

Jest jasne, że odwrotny system $(I, (X_i, G_i), F_{ij})$ przestrzeni porządków automatycznie definiuje zarówno prosty system grup (I, G_i, F_{ij}^*) jak i odwrotny system zbiorów charakterów (I, X_i, F_{ij}). Ponadto przyjmując $G = \varinjlim G_i$ oraz $X = \lim X_i$ otrzymujemy przestrzeń porządków (X, G), którą nazywać będziemy *granicą odwrotną* przestrzeni porządków i oznaczać przez $\lim(X_i, G_i)$. Dla ustalonego $j \in I$ będziemy pisać π_j dla oznaczenia rzutowania $\pi_j \colon X \to X_j$ takiego, że $\pi_j = F_{ij} \circ \pi_i$, dla $i \succeq j$, $i \in I$ oraz γ_j dla oznaczenia injekcji $\gamma_j \colon G_j \to G$ takiej, że $\gamma_j = \gamma_i \circ F_{ij}^*$, dla $i \succeq j$, $i \in I$. Jako że, w istocie, $G = \bigcup_{i \in I} G_i$, będziemy używać tego samego symbolu a dla oznaczenia elementu $a \in G_i$ i jego obrazu $a \in \gamma_i(G_i) \subset G$. Przestrzeń porządków, która jest granicą odwrotną skończonych przestrzeni porządków będzie przez nas nazywana *proskończoną*.

Jeżeli $(X,\, G)$ jest przestrzenią porządków, zaś G_0 podgrupą grupy G, to oznaczmy przez X_0 zbiór wszystkich charakterów z X zwężonych do G_0. W przypadku, gdy otrzymamy tak nową przestrzeń porządków (X_0, G_0), będziemy ją nazywać *przestrzenią ilorazową* (X, G), w ogólności zaś będziemy ją nazywać *strukturą ilorazową*. Stwierdzenie czy dana struktura ilorazowa jest w istocie przestrzenią ilorazową jest na ogół trudne.

We wcześniejszej dyskusji wspominaliśmy już o indeksie stabilności i o wachlarzach. Indeks stabilności przestrzeni (X, G) można równoważnie zdefiniować jako największą liczbę naturalną n taką, że w (X, G) istnieje podprzestrzeń o 2^n elementach, która jest wachlarzem (albo jako ∞ gdy nie ma takiej liczby).

Wspominaliśmy też o problemie realizacji aksjomatycznych teorii form kwadratowych. Dotyczy on także przestrzeni porządków, dla których do dziś nie jest rozstrzygnięte pytanie, czy istnieją przykłady przestrzeni, które nie są izomorficzne z przestrzeniami $(X_{\sum F^2},\, G_{\sum F^2})$, gdzie F jest pewnym ciałem (aczkolwiek panuje powszechne przekonanie, że przykłady takie można wskazać). Kostrukcje przestrzeni ilorazowych i granic odwrotnych dostarczają potencjalnego narzędzia do znalezienia takich przykładów. Dokładniej, w opinii autora, wydaje się, iż środkiem do stwierdzenia, czy dana przestrzeń porządków jest realizowalna może być znalezienie odpowiedzi na następujące pytanie: czy jest prawdą, że dla przestrzeni porządków (X, G) zachodzi równość

$$W(X, G) \cap \mathcal{C}(X, 2^n\mathbb{Z}) = I^n(X, G)?$$

Tutaj $\mathcal{C}(X,\, 2^n\mathbb{Z})$ oznacza zbiór funkcji ciągłych $X \to 2^n\mathbb{Z}$, zaś $I^n(X,\, G)$ jest n-tą potęgą ideału fundamentalnego $I(X, G)$ pierścienia Witta przestrzeni porządków (którego budowa przypomina zwykły pierścień Witta, nie będziemy wszakże podawać tu wszystkich szczegółów technicznych związanych z jego konstrukcją). Pytanie to znane jest jako *otwarty problem Lama B*. Można nietrudno sprawdzić, że odpowiedź na nie jest pozytywna w przypadku $n=1$ lub $n=2$ oraz dla przestrzeni porządków (X, G) takich, że $\mathrm{sta}(X, G) \leq 3$ [42, Proposition 3.1]. Co więcej, problem ten ma pozytywne rozstrzygnięcie dla wszystkich realizowalnych przestrzeni porządków, co stosunkowo niedawno zostało udowodnione przez Dickmanna i Miraglię [19] przy użyciu słynnych rezultatów Orlova, Vishika i Voevodsky'ego [47], [61].

Tym samym w celu wskazania przestrzeni porządków, która nie jest realizowalna, wystarczyłoby skonstruować przestrzeń porządków $(X,\, G)$ zawierającą co najmniej 16-elementowe wachlarze i formę kwadratową $\phi = ((a_1,\, b_1)) \oplus \ldots \oplus ((a_s,\, b_s))$, $s \in \mathbb{N}$, taką, że $\phi(x) \equiv 0 \bmod 8$, dla wszystkich $x \in X$, jakkolwiek

$$\phi \neq c_1((d_1, e_1,\, f_1)) \oplus \ldots \oplus c_t((d_t, e_t,\, f_t)),$$

dla wszelkich możliwych wyborów of $t \in \mathbb{N}$ oraz $d_i, e_i,\, f_i \in G$, $i \in \{1, \ldots, t\}$.

Powyższa obserwacja skierowała zainteresowania autora w kierunku opracowania metod „rozdmuchiwania" istniejących wachlarzy w przestrzeniach porządków o czytelnej i dobrze opisanej strukturze w celu otrzymywania w ten sposób przykładów nowych przestrzeni porządków o wyższym indeksie stabilności, gdzie otwarty problem Lama B podlegałby dalszej weryfkacji. W rezultacie tych rozważań powstała seria prac **[SO1]**, **[SO2]** i **[SO3]**. Omówimy teraz pokrótce ich najważniejsze rezultaty.

6.1 Praca [SO1].

Praca otwierająca serię zawiera dwa rezultaty, o których warto tu wspomnieć. Po pierwsze, otrzymano następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.1. *(**[SO1]**, Theorem 1) Przestrzeń porządków $(X_{\sum \mathbb{Q}(x)^2}, G_{\sum \mathbb{Q}(x)^2})$ jest proskończona.*

Był to poniekąd otwarty problem i jego rozwiązanie było dla autora źródłem pewnej satysfakcji, aczkolwiek pełna siła powyższego twierdzenia ujawnia się w jego dowodzie, który jest czysto geometryczny i pozwala dogłębnie zrozumieć strukturę przestrzeni porządków ciała $\mathbb{Q}(x)$.

Po drugie, udowodnione jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.2. *(**[SO1]**, Theorem 2) Jeśli $(X, G) = \lim(X_i, G_i)$, dla pewnego odwrotnego systemu przestrzeni porządków $(I, (X_i, G_i), F_{ij})$, i jeśli, dla wszystkich $i \in I$, pp hipoteza zachodzi w przestrzeni (X_i, G_i), to zachodzi również w (X, G).*

Twierdzenie to zostało wcześniej udowodnione przez Astiera i Tressla [4], którzy zastosowani raczej skomplikowane wyniki z teorii modeli, tymczasem podany tu dowód jest elementarny.

6.2 Praca [SO2].

Cała praca poświęcona jest dowodowi jednego twierdzenia:

Twierdzenie 6.3. *(**[SO2]**, Theorem 9) Niech $G_0 \subset G_{\sum \mathbb{Q}(x)^2}$ będzie podgrupą grupy $G_{\sum \mathbb{Q}(x)^2}$ taką, że $-1 \in G_0$ i niech $(G_{\sum \mathbb{Q}(x)^2}: G_0) = 2$. Jeśli (X_0, G_0) jest przestrzenią porządków, gdzie $X_0 = X|_{G_0}$, to wówczas koniecznie (X_0, G_0) jest proskończona.*

Dowód jest zmodyfikowaną wersją techniki opracowanej dla uzyskania Twierdzenia 6.1. Jest niezwykle żmudny i zainteresowany czytelnik zmuszony jest do przeanalizowania 20 stron technicznych rozważań geometrycznych, które wszakże są raczej dość elementarne. Doświadczenia zebrane podczas opracowywania dowodu przekonały autorów pracy, że metody rozwinięte na potrzeby dowodu Twierdzenia 6.1 są zbyt skomplikowane, aby dało się je zastosować do bardziej zaawansowanych przykładów.

6.3 Praca [SO3].

Poszukiwania metod sprawdzania, czy struktury ilorazowe są w istocie przestrzeniami ilorazowymi doprowadziły do powstania pracy **[SO3]**. Autorom udało się poczynić kilka interesujących obserwacji, które, w szczególności, uogólniają rezultaty uzyskane w pracach **[SO1]** i **[SO2]**. Niech (X, G) będzie przestrzenią porządków. Dla $S \subseteq G$, $\langle S \rangle$ niech oznacza podgrupę G generowaną przez S. Dla $S \subseteq \chi(G)$,

$$S^{\perp} := \{g \in G: \sigma(g) = 1 \forall \sigma \in S\} \text{ i } \langle S \rangle := \chi(G / S^{\perp}),$$

jest domkniętą podgrupą $\chi(G)$ generowaną przez S. Powiemy, że (X, G) jest *sumą prostą* przestrzeni porządków (X_i, G_i), $i \in \{1, ..., n\}$, co oznaczamy przez $(X, G) = \coprod_{i=1}^{n} (X_i, G_i) = (X_1, G_1) \sqcup ... \sqcup (X_n, G_n)$, jeśli X jest rozłączną sumą zbiorów $X_1, ..., X_n$, zaś G składa się ze wszystkich funkcji $a: X \to \{-1, 1\}$ takich, że $a|_{X_i} \in G_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Wówczas $G = G_1 \oplus ... \oplus G_n$, gdzie rolę wyróżnionego elementu -1 spełnia $(-1, -1, ..., -1)$. Dalej, mówimy, że (X, G) jest *rozszerzeniem grupowym* przestrzeni porządków $(\bar{X}, \bar{G})$, jeśli G jest grupą o wykładniku 2, $\bar{G}$ jest podgrupą G, i $X = \{x \in \chi(G): x|_{\bar{G}} \in \bar{X}\}$. Jako że G rozkłada się jako $G = \bar{G} \times H$, będziemy często pisać $(X, G) = (\bar{X}, \bar{G}) \times H$ dla oznaczenia rozszerzeń grupowych. Zarówno suma prosta przestrzeni jak i rozszerzenie grupowe są przestrzeniami porządków.

Niech (X, G) będzie przestrzenią porządków, zaś (X_0, G_0) strukturą ilorazową (X, G). Poszukujemy warunków koniecznych i wystarczających na G_0 aby (X_0, G_0) była przestrzenią ilorazową (X, G). Załóżmy najpierw, że G_0 podgrupą o indeksie 2 w G, $-1 \in G_0$. Jako że G_0 jest indeksu 2 oraz $-1 \in G_0$, G_0 jest jednoznacznie wyznaczona przez charakter na $G / \{\pm 1\}$, tzn. istnieje jednoznacznie wyznaczony $\gamma \in \chi(G)$, $\gamma(-1) = 1$ taki, że $G_0 = \ker(\gamma)$. Następujący rezultat otwiera dyskusję w pracy **[SO3]**:

Twierdzenie 6.4. *(**[SO3]**, Theorem 2.2)* *(i) Załóżmy, że (X_0, G_0) jest przestrzenią ilorazową (X, G), $(Y, G/Y^{\perp})$ jest podprzestrzenią (X, G), $\gamma \in \langle Y \rangle$ oraz $Y_0 = Y|_{G_0}$. Wówczas $(Y_0, G_0/Y^{\perp})$ jest przestrzenią ilorazową $(Y, G/Y^{\perp})$.*

(ii) Załóżmy, że (X, G) jest rozszerzeniem grupowym (X', G') i $\gamma' = \gamma|_{G'}$.

Jeśli $\gamma' = 1$, to wówczas (X_0, G_0) jest przestrzenią ilorazową (X, G).

Jeśli $\gamma' \neq 1$, to (X_0, G_0) jest przestrzenią ilorazową (X, G) wtedy i tylko wtedy, gdy (X_0', G_0') jest przestrzenią ilorazową (X', G'). Tutaj $G_0' := \ker(\gamma')$, $X_0' := X'|_{G_0'}$.

Przy użyciu powyższego rezultatu można pokazać następujące:

Twierdzenie 6.5. *(**[SO3]**, Theorem 2.4) Warunkiem koniecznym na to, aby (X_0, G_0) była przestrzenią ilorazową (X, G) jest aby $\gamma \in X^4$.*

Tutaj $X^k := \{\prod_{i=1}^k \sigma_i : \sigma_i \in X, i = 1, ..., k\}$. Jako że σ_i nie muszą być rozłączne, $\{1\} \subseteq X^2 \subseteq X^4$. Jeśli (X, G) jest wachlarzem, to $X^4 = X^2 = \{\gamma \in \chi(G) : \gamma(-1) = 1\}$. Okazuje się, że w niektórych przypadkach powyższy warunek jest też wystarczający:

Twierdzenie 6.6. *(**[SO3]**, Theorem 2.5) Jeśli* $\mathrm{stab}(X, G) = 1$, *to warunek konieczny z Twierdzenia Theorem 6.5 jest też wystarczający.*

Dla przestrzeni porządków (X, G) definiujemy relację $\sim$ nazywaną *spójnością* jak następuje: jeśli $x_1, x_2 \in X$, to $x_1 \sim x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy albo $x_1 = x_2$, albo istnieje czteroelementowy wachlarz V w (X, G) taki, że $x_1, x_2 \in V$. Klasy równoważności relacji $\sim$ nazywać będziemy *składowymi spójnymi* przestrzeni (X, G). Wiadomo, że jeśli (X, G) jest skończoną przestrzenią porządków, a $X_1, ..., X_n$ jej składowymi spójnymi, to $(X, G) = (X_1, G|_{X_1}) \sqcup ... \sqcup (X_n, G|_{X_n})$. Ponadto przestrzenie $(X_i, G|_{X_i})$ są albo jednoelementowe, albo są właściwymi rozszerzeniami grupowymi.

Celem uproszczenia dalszej dyskusji będziemy od teraz zakładać, że przestrzeń porządków (X, G) nie zawiera nieskończonych wachlarzy. Jest tak, na przykład, w przypadku gdy indeks stabilności (X, G) jest skończony. Dla $\delta \in \chi(G)$ oznaczmy $X_\delta := \{\sigma \in X : \sigma \delta \in X\} = X \cap \delta X$. Można pokazać, że skoro (X, G) nie ma nieskończonych wachlarzy, to każda składowa spójna jest albo przestrzenią jednoelementową, albo jest postaci X_δ dla pewnego $\delta \in \chi(G)$, $\delta \neq 1$, $|X_\delta| \geq 4$.

Wymagany w Twierdzeniu 6.5 warunek, aby $\gamma \in X^4$ można istotnie poprawić w następujący sposób:

Twierdzenie 6.7. *(**[SO3]**, Theorem 2.8) Warunkiem koniecznym na to, aby (X_0, G_0) była przestrzenią ilorazową (X, G) jest aby $\gamma = \prod_{i=1}^k \sigma_i$, $\sigma_i \in X$, $k = 2$ lub $k = 4$ i $\gamma \notin X^2$ oraz, w przypadky gdy nie wszystkie σ_i należą do tej samej składowej spójnej (X, G) i składowe spójne, do których należą σ_i nie są wszystkie jednoelementowe, albo $k = 2$ i dokładnie jedna ze składowych spójnych, do których należą σ_i nie jest jednoelementowa, albo $k = 4$, $\gamma \notin X^2$ i, po ewentualnej zmianie numeracji, składową spójną σ_3 i σ_4 jest $X_{\sigma_3\sigma_4}$ i albo składową spójną σ_1 i σ_2 jest $X_{\sigma_1\sigma_2}$ albo składowymi spólnymi σ_i są przestrzenie jednoelementowe dla $i = 1, 2$.*

Naturalnie można się zapytywać, czy warunki konieczne wyartykułowane w Twierdzeniu 6.7 są wystarczające w przypadku, gdy (X, G) ma indeks stabilności równy 2. Nie jesteśmy w stanie odpowiedzieć na tak postawione pytanie w pełnej ogólności, jesteśmy wszakże w stanie dowieść, co następuje:

***Twierdzenie* 6.8.** *(**[SO3]**, Theorem 2.9) Jeśli (X, G) ma indeks stabilności 2 i tylko skończenie wiele składowych spójnych, które nie są jednoelementowe, to wtedy warunki konieczne sformułowane w Twierdzeniu 6.7 są też wystarczające.*

W istocie można udowodnić znacznie bardziej zaskakujący rezultat:

Twierdzenie 6.9. *([SO3], Theorem 3.3) Następujące warunki są równoważne:*

1. *(X_0, G_0) jest przestrzenią ilorazową (X, G).*
2. *γ spełnia warunki konieczne z Twierdzenia 6.7.*
3. *(X_0, G_0) jest proskończoną przestrzenią porządków.*

W pozostałem części pracy rozważane są dowolne ilorazy. Udowodniony jest następujący warunek:

Twierdzenie 6.10. *([SO3], Theorem 5.1) Warunkiem koniecznym na to, aby struktura ilorazowa $(X_0,\, G_0)$ przestrzeni $(X,\, G)$ była przestrzenią porządków jest aby S generował $\chi\,(G\,/\,G_0)$ jako grupę topologiczną, tzn. aby $\chi\,(G/G_0)$ było domknięciem grupy $\chi\,(G/G_0)$ generowanej przez S, tj. $S^{\perp} = G_0$.*

Dla każdego $\gamma \in S$, $\gamma \neq 1$, γ ma pewne (niekoniecznie jednoznacznie wyznaczone) minimalne przedstawienie postaci $\gamma = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i$, $\sigma_i \in X$, $k = 2$ lub 4. Oznaczmy przez $(Y, G/\Delta) = (Y, G/Y^{\perp})$ podprzestrzeń przestrzeni (X, G) generowaną przez różne składowe spójne elementów σ_i, $i = 1, \ldots,$ k, gdzie γ przebiega zbiór $S \setminus \{1\}$, i niech Y_0 oznacza zbiór zwężeń elementów z Y do G_0.

***Twierdzenie* 6.11.** *([SO3], Theorem 5.2) Warunkiem koniecznym na to, aby struktura ilorazowa $(X_0,\, G_0)$ przestrzeni $(X,\, G)$ była przestrzenią porządków jest aby S generował $\chi\,(G\,/\,G_0)$ jako grupę topologiczną i aby struktura ilorazowa $(Y_0, G_0\,/\,\Delta)$ przestrzeni $(Y, G\,/\,\Delta)$ była przestrzenią porządków.*

Podprzestrzeń $(Y,\, G\,/\,\Delta)$ przestrzeni $(X,\, G)$ zdefiniowana powyżej będzie przez nas nazywama *rdzeniem* przestrzeni porządków (X, G) względem struktury ilorazowej (X_0, G_0). Znowu nasuwa się naturalne pytanie, czy warunki konieczne podane w Twierdzeniu 6.10 mogą być wystarczające. Jakkolwiek nie potrafimy odpowiedzieć na nie w pełnej ogólności, jesteśmy wszakże w stanie rozważyć pewne szczególne przypadki.

***Twierdzenie* 6.12.** *([SO3], Theorem 5.4) Dla przestrzeni porządków (X, G) o tylko skończenie wielu niejednoelementowych składowych spójnych i bez nieskończonych wachlarzy oraz o strukturze ilorazowej $(X_0,\, G_0)$ przestrzeni $(X,\, G)$ o skończonym indeksie, następujące warunki są równoważne:*

1. *(X_0, G_0) jest przestrzenią porządków.*
2. *$X^4 \cap \chi\,(G/G_0)$ generuje $\chi\,(G/G_0)$ i struktura ilorazowa $(Y_0, G_0/\Delta)$ rdzenia $(Y, G/\Delta)$ jest przestrzenią porządków.*

Wreszcie w szczególnym przypadku przestrzeni porządków ciała $\mathbb{Q}(x)$ powyższe twierdzenie może by zasadniczo wzmocnione:

Twierdzenie 6.13. *([SO3], Theorem 5.5) Dla przestrzeni porządków $(X,\, G) = (X_{\sum \mathbb{Q}(x)^2},$ $G_{\sum \mathbb{Q}(x)^2})$ i struktury ilorazowej $(X_0,\, G_0)$ przestrzeni $(X,\, G)$ o skończonym indeksie następujące warunki są równoważne:*

1. *(X_0, G_0) jest przestrzenią porządków.*
2. *$X^4 \cap \chi\,(G/G_0)$ generuje $\chi\,(G/G_0)$ i struktura ilorazowa $(Y_0, G/\Delta)$ rdzenia $(Y, G/\Delta)$ jest przestrzenią porządków.*

3. (X_0, G_0) *jest proskończoną przestrzenią porządków.*

Otrzymujemy w ten sposób zaskakująco spektakularne wzmocnienie rezultatu pracy **[SO2]** uzyskane przy użyciu zupełnie innych środków.

7 Długość symboli.

7.1 Praca [SL1].

Niech F będzie ciałem charakterystyki $\neq 2$, niech $n \in \mathbb{N}$, i niech $k_n(F)$ oznacza n-tą K-grupę Milnora $K_n(F)$ modulo 2. $k_n(F)$ jest addytywnie generowana przez „symbole" $\{a_1, ..., a_n\}$, $a_i \in F^\times$, i wobec hipotezy Milnora wiadomo, że $k_n(F)$ jest kanonicznie izomorficzna z $I^n(F)/I^{n+1}(F)$ oraz z n-tą grupą kohomologii Galois ciała F o współczynnikach w $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H^n(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

n-tą długością symboli $\lambda_n(F)$ nazywać będziemy najmniejszą nieujemną liczbę naturalną m taką, że każdy element $k_n(F)$ może być zapisany jako suma m symboli, lub ∞ jeżeli liczba taka nie istnieje. Głównym celem pracy było porównanie indeksu stabilności $\mathrm{stab}(X_{\sum F^2}, G_{\sum F^2})$ z liczbą $\lambda_n(F)$. Główny rezultat jest następujący:

Twierdzenie 7.1. *(**[SL1]**, Theorem 3.6) Niech F będzie ciałem pitagorejskim i niech $s = \mathrm{stab}(X_{\sum F^2}, G_{\sum F^2}) < \infty$.*

1. *Jeśli $s \leq 2$, to wówczas albo $\lambda_2(F) = s$, albo F jest jednoznacznie uporządkowane, $s = 0$, oraz $\lambda_2(F) = 1$.*

2. *Jeśli $s \geq 3$, to wówczas $\frac{s+1}{2} \leq \lambda_2(F) \leq 2^{s-1}(2^{s-2} - 1)$.*

8 Twierdzenia o punkcie stałym.

8.1 Praca [FP1].

Kuhlmann i Kuhlmann niedawno udowodnili (por. [35]) nowy rodzaj twierdzeń o punkcie stałym, jak nazywają twierdzeniami o punkcie stałym dla przestrzeni kul. Ich wyniki podane są w bardzo ogólnym języków przestrzeni, które nie są metryczne ani nawet topologiczne, ale zamiast tego wykorzystują pojęcie tak zwanych kul, czyli dowolnych rodzin pewnych podzbiorów. Niech X będzie niepustym zbiorem. *Przestrzenią kul* nazywamy parę $(X, \mathcal{B})$, gdzie $\mathcal{B}$ jest ustaloną rodziną niepustych podzbiorów X zwanych *kulami*. *Gniazdem kul* nazywamy dowolny niepusty łańcuch $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$ uporządkowany przez inkluzję. Jeśli $f: X \to X$ jest pewnym odwzorowanie, to kulę $B \in \mathcal{B}$ nazywamy *f-ściągającą* jeśli albo jest zbiorem jednoelementowym złożonym z punktu stałego f, albo jeśli $f(B) \subsetneq B$. Rezultaty podane w [35] są następujące:

Twierdzenie 8.1. *Jeśli $(X, \mathcal{B})$ jest przestrzenią kul, zaś $f: X \to X$ odwzorowaniem takim, że:*

1. *istnieje kula f-ściągająca,*

2. *$f(B)$ zawiera kulę f-ściągającą, o ile if $B \in \mathcal{B}$ jest kulą f-ściągającą,*

3. *dla każdego gniazda kul f-ściągających $\mathcal{N}$, przekrój $\bigcap \mathcal{N}$ zawiera kulę f-ściągającą,*

to f ma punkt stały.

Twierdzenie 8.2. *Jeśli $(X, \mathcal{B})$ jest przestrzenią kul, zaś $f\colon X \to X$ odwzorowaniem takim, że:*

1. *X jest kulą f-ściągającą,*
2. *$f(B)$ zawiera kulę f-ściągającą, o ile $B \in \mathcal{B}$ jest kulą f-ściągającą,*
3. *dla każdego gniazda kul f-ściągających $\mathcal{N}$, przekrój $\bigcap \mathcal{N}$ jest kulą f-ściągającą,*

to f ma dokładnie jeden punkt stały.

Głównymi rezultatami miniaturowej notki **[FP1]** są dwa twierdzenia (**[FP1]**, Theorems 4 i 6) pokazujące, że Twierdzenia 8.1 i 8.2 można wydedukować z wersji twierdzeń Bourbakiego-Witta o punkcie stałym.

Bibliografia

[1] Jón Arason, Richard Elman, i Bill Jacob. Rigid elements, valuations, and realization of Witt rings. *J. Algebra*, 110:449–467, 1987.

[2] Jón Arason i Albrecht Pfister. Beweis des Krullschen Durchschnittssatzes für den Wittring. *Invent. Math.*, 12:173–176, 1971.

[3] Emil Artin i Otto Schreier. Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 5:225–231, 1927.

[4] V. Astier i M. Tressl. Axiomatization of local-global principles for pp-formulas in spaces of orderings. *Arch. Math. Logic*, 44(1):77–95, 2005.

[5] Vincent Astier. On some sheaves of special groups. *Arch. Math. Logic*, 46(5-6):481–488, 2007.

[6] Ricardo Baeza i Remo Moresi. On the Witt-equivalence of fields of characteristic 2. *J. Algebra*, 92:446–453, 1985.

[7] Eberhard Becker. *Hereditarily Pythagorean fields and orderings of higher level*, volume 29 of *Monografias de Matematica*. IMPA, Rio de Janeiro, 1978.

[8] Jenna Carpenter. Finiteness theorems for forms over global fields. *Math. Z.*, 209(1):153–166, 1992.

[9] Andrew Carson i Murray Marshall. Decomposition of Witt rings. *Can. J. Math.*, 34:1276–1302, 1982.

[10] John William Scott Cassels. On the representation of rational functions as sums of squares. *Acta Arith.*, 9:79–82, 1964.

[11] Alain Connes i Catherina Consani. In G. van Dijk, editor, *Casimir force, Casimir operators and Riemann hypothesis. Mathematics for innovation in industry and science. Proceedings of the conference, Fukuoka, Japan, November 9-13, 2009*, pages 147–198. De Gruyter, Berlin, 2010.

[12] Alain Connes i Catherina Consani. The hyperring of adele classes. *J. Number Theory*, 131:159–194, 2011.

[13] Alain Connes i Catherina Consani. Universal thickening of the field of real numbers. In A. Alaca, editor, *Advances in the Theory of Numbers. Proceedings of the Thirteenth Conference of the Canadian Number Theory Association*, volume 77 of *Fields Institute Communications*, pages 11–74. Springer, New York, 2015.

[14] Craig Cordes. The Witt group and the equivalence of fields with respect to quadratic forms. *J. Algebra*, 26:400–421, 1973.

[15] Craig Cordes. Quadratic forms over nonformally real fields with a finite number of quaternion algebras. *Pac. J. Math.*, 63:357–365, 1976.

[16] Piergiulio Corsini i Violeta Leoreanu-Fotea. *Applications of hyperstructure theory*. Springer Science & Business Media, Dordrecht, 2003.

[17] Bijan Davvaz i Violeta Leoreanu-Fotea. *Hyperring theory and applications*. International Academic Press, Palm Harbor, FL, 2007.

[18] M. A. Dickmann i F. Miraglia. Special groups. Boolean-theoretic methods in the theory of quadratic forms. With Appendixes by M. A. Dickmann and A. Petrovich. *Mem. Am. Math. Soc.*, 689:247, 2000.

[19] M. Dickmann i F. Miraglia. Lam's conjecture. *Algebra Colloq.*, 10(2):149–176, 2003.

[20] Paweł Gładki. N-th root selections in fields. To appear.

[21] Paweł Gładki i Murray Marshall. Witt equivalence of function fields of conics. *ArXiv e-prints*. ArXiv:1609.01930.

[22] Nicolas Grenier-Boley, Detlev W. Hoffmann, i Claus Scheiderer. Isomorphism criteria for Witt rings of real fields. *Forum Math.*, 25(1):1–18, 2013.

[23] David Harrison. Witt rings. University of Kentucky Notes, 1970.

[24] Zur Izhakian, Manfred Knebusch, i Louis Rowen. Layered tropical mathematics. *J. Algebra*, 416:200–273, 2014.

[25] Zur Izhakian i Louis Rowen. Supertropical algebra. *Adv. Math.*, 225(4):2222–2286, 2010.

[26] Jean-René Joly. Sommes de puissances d-ièmes dans un anneau commutatif. *Acta Arith.*, 17:37–114, 1970.

[27] Jaiung Jun. Hyperstructures of affine algebraic group schemes. *J. Number Theory*, 167:336–352, 2016.

[28] Jaiung Jun. Algebraic geometry over hyperrings. *Adv. Math.*, 323:142–192, 2018.

[29] Jaiung Jun. Valuations of semirings. *J. Pure Appl. Algebra*, 222(8):2063–2088, 2018.

[30] Jerrold Kleinstein i Alex Rosenberg. Succinct and representational Witt rings. *Pac. J. Math.*, 86:99–137, 1980.

[31] Manfred Knebusch, Alex Rosenberg, i Roger Ware. Structure of Witt rings, quotients of abelian group rings, and orderings of fields. *Bull. Am. Math. Soc.*, 77:205–210, 1971.

[32] Manfred Knebusch, Alex Rosenberg, i Roger Ware. Structure of Witt rings and quotients of abelian group rings. *Am. J. Math.*, 94:119–155, 1972.

[33] Przemysław Koprowski. Witt equivalence of algebraic function fields over real closed fields. *Math. Z.*, 242(2):323–345, 2002.

[34] Marc Krasner. Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique 0. In *Colloque d'algébre supérieure, tenu á Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956*, Centre Belge de Recherches Mathématiques Établissements Ceuterick, Lou- vain, pages 129–206. Librairie Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[35] Katarzyna Kuhlmann i Franz-Viktor Kuhlmann. A common generalization of metric, ultrametric and topological fixed point theorems. *Forum Math.*, 27(1):303–327, 2015.

[36] Mieczysław Kula, L. Szczepanik, i Kazimierz Szymiczek. Quadratic form schemes and quaternionic schemes. *Fundam. Math.*, 130(4):181–190, 1988.

[37] Tsit Yuen Lam. *Introduction to quadratic forms over fields*, volume 67 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[38] Grigory Litvinov. Hypergroups and hypergroup algebras. *J. Sov. Math.*, 38:1734–1761, 1987.

[39] Oliver Lorscheid. The geometry of blueprints. I: Algebraic background and scheme theory. *Adv. Math.*, 229(3):1804–1846, 2012.

[40] Oliver Lorscheid. The geometry of blueprints. Part II: Tits-Weyl models of algebraic groups. *Forum Math. Sigma*, 6:90, 2018.

[41] Murray Marshall. Abstract Witt rings. Queen's Pap. Pure Appl. Math. 57, 257 p. (1980)., 1980.

[42] Murray Marshall. Open questions in the theory of spaces of orderings. *J. Symb. Log.*, 67(1):341–352, 2002.

[43] Murray Marshall. Real reduced multirings and multifields. *J. Pure Appl. Algebra*, 205(2):452–468, 2006.

[44] Murray Marshall. *Positive polynomials and sums of squares.*, volume 146. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2008.

[45] Jean Mittas. Sur une classe d'hypergroupes commutatifs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 269:485–488, 1969.

[46] Colm Mulcahy. An abstract approach to higher level forms and rigidity. *Commun. Algebra*, 16(3):577–612, 1988.

[47] D. Orlov, A. Vishik, i V. Voevodsky. An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms. *Ann. Math. (2)*, 165(1):1–13, 2007.

[48] Robert Perlis, Kazimierz Szymiczek, Pierre Conner, i Richard Litherland. Matching Witts with global fields. In *Recent advances in real algebraic geometry and quadratic forms. Proceedings of the RAGSQUAD year, Berkeley, CA, USA, 1990-1991*, pages 365–387. Providence, RI: American Mathematical Society, 1994.

[49] Albrecht Pfister. Quadratische formen in beliebigen körpern. *Invent. Math.*, 1:116–132, 1966.

[50] Victoria Powers. Characterizing reduced Witt rings of higher level. *Pac. J. Math.*, 128(2):333–347, 1987.

[51] Victoria Powers. Finite spaces of signatures. *Can. J. Math.*, 41(5):808–829, 1989.

[52] Emanuel Sperner. Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie. *Math. Ann*, 121:107–130, 1949.

[53] T. A. Springer. Quadratic forms over fields with a discrete valuation. I: Equivalence classes of definite forms. II: Norms. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, 58:352–362, 1956.

[54] L. Szczepanik. Quadratic form schemes with non-trivial radical. *Colloq. Math.*, 49:143–160, 1985.

[55] Lucyna Szczepanik. Fields and quadratic form schemes with the index of radical not exceeding 16. Pr. Nauk Uniw. Śląsk. Katowicach 693, Ann. Math. Silesianae 1 (13), 23-46 (1985)., 1985.

[56] Kazimierz Szymiczek. Matching Witts locally and globally. *Math. Slovaca*, 41(3):315–330, 1991.

[57] Kazimierz Szymiczek. Hilbert-symbol equivalence of number fields. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 11:7–16, 1997.

[58] Kazimierz Szymiczek. 2-ranks of class groups of Witt equivalent number fields. *Pr. Nauk. Uniw. Śląsk. Katowicach, Ann. Math. Silesianae*, 1751:53–64, 1998.

[59] Oleg Viro. On basic concepts of tropical geometry. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 273:252–282, 2011.

[60] Oleg Viro. Hyperfields for Tropical Geometry I. Hyperfields and dequantization. *ArXiv e-prints*. ArXiv:1006.3034.

[61] Vladimir Voevodsky. Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$-coefficients. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 98:59–104, 2003.

[62] William C. Waterhouse. Square root as homomorphism. *American Math. Monthly*, 119:235–239, 2012.

[63] Ernst Witt. Theorie der quadratischen formen in beliebigen körpern. *J. Reine Angew. Math.*, 176:31–44, 1937.

[64] Paul-Hermann Zieschang. *Theory of association schemes*. Springer Science & Business Media, Dordrecht, 2006.