

**Ocena rozprawy doktorskiej pana Tomasza Witczaka
Modele otoczeniowe i topologiczne
dla klasycznych i intuicjonistycznych logik modalnych**

Rozprawa doktorska pana Tomasza Witczaka wnosi wartościowy wkład do logiki matematycznej, dokładniej - do teorii logik intuicjonistycznych i modalnych. Główny wkład: autor dowodzi dwóch istotnych twierdzeń. Po pierwsze, pokazuje, że wzbogacona o definicję konieczności semantyka otoczeniowa dla intuicjonizmu, którą zdefiniowali Moniri i Maleki (2015) jest równoważna semantyce dla intuicjonistycznej logiki modalnej z aksjomatami K i T (por. część 1 pracy). Po drugie dowodzi pełności kilku intuicjonistycznych systemów tzw. fałszywych wierzeń; poprzednicy autora zajmowali się klasycznymi systemami tego typu (por. część 3 rozprawy).

Swoimi rozważaniami z obu wspomnianych części pracy, a także z pozostałych części autor wzbogaca ogólny obraz logik intuicjonistycznych i modalnych; logiki intuicjonistyczne i modalne pozostają przecież w ciągłym zainteresowaniu badaczy.

Wyniki rozprawy

Praca składa się z Wprowadzenia, sześciu części i podsumowania. Autor dołącza też dziesięciostronicowe podsumowanie.

Część pierwsza (podstawowe jednostki redakcyjne rozprawy autor nazywa częściami) to „Intuicjonistyczna logika modalna na bazie semantyki otoczeniowej”. Zawiera jeden z podstawowych wyników, wspomnianych wyżej.

Przypomnijmy, że idea semantyki otoczeniowej sprowadza się do tego, że o ile w semantykach relacyjnych prawdziwe w danym świecie to to, co zachodzi w każdym możliwym świecie, to w semantykach otoczeniowych prawdziwe to to, co zachodzi w każdym „otoczeniu” danego świata. Tak więc model otoczeniowy można przedstawić jako trójkę $\langle U, \mathcal{N}, V \rangle$ gdzie U jest zbiorem, \mathcal{N} jest funkcją, przyporządkowującą każdemu światu zbiór podzbiorów - „otoczeń” danego świata, a V jest wartościowaniem. Mamy tu pojęcie otoczenia, więc zwiastuje to związki z z pojęciami topologicznymi.

Semantyki otoczeniowe dla zwykłej logiki modalnej znane są od dawna (1968, 1970), ale badania nad semantykami tego typu dla logiki intuicjonistycznej są wciąż ciekawym obiektem badań.

Autor modyfikuje semantykę otoczeniową zdefiniowaną przez Irańczyków [Moniri i Maleki, (2015)] dla IPL (intuicjonistycznej logiki zdaniowej) dodając warunek dotyczący funkcji \Box . W rezultacie dostaje semantykę dla intuicjonistycznej logiki intuicjonistycznej z aksjomatami K i T. Wynik jest nieco nieoczekiwany, bo należałoby się tu spodziewać logiki z aksjomatami K, T i 4, tak jak przy związkach IPL z logiką modalną. Podejmuje też dalsze badania nad tą semantyką, dowodząc np. rozstrzygalności przez *finite model property* (poprzez filtrację). Pokazuje też możliwość wprowadzenia funkcji \Diamond do tej semantyki; dowodzi, że spójniki \Box i \Diamond są tu niezależne. Część tę uważam na najciekawszą w całej pracy.

Dodajmy, że w tej części zajmuje się też intuicjonistyczną „logiką publicznego obwieszczenia”, próbując - stosując modele otoczeniowe - przenieść na logikę intuicjonistyczną wyniki uzyskane w logice klasycznej. Podaje nawet propozycję aksjomatyzacji (Lemat 1.65); pełności jednak nie dostaje, uzyskując jeden z wielu w tej pracy wyników częściowych.

Część 2 to „Badania nad semantyką topologiczną w kontekście $iKT\Box$ ”. Autor pokazuje transformacje semantyk otoczeń w przestrzenie topologiczne i z przestrzeni topologicznych w semantykę otoczeniową i wskazuje problemy z tym związane. Pokazuje różne związki pomiędzy topologiami a strukturami otoczeniowymi. Rozdział ten zgodnie z zamysłem autora nie przynosi nowych wyników, ale systematyzuje różne kwestie.

Część 3 to „Intuicjonistyczne logiki nieznanych prawd i fałszywych wierzeń”. Logika fałszywych wierzeń: problem dotyczy formalizacji następującej sytuacji intelektualnej. Co prawda formuła ϕ jest fałszywa, ale się w nią wierzy: wierzy w nią rozważany podmiot albo inni, np. doradcy decydenta. Przenosząc to na grunt semantyki: zdanie ϕ jest fałszywe, ale należy do pewnego możliwego świata. Jak się okazuje, da się znaleźć logikę modalną (rozszerzenie logiki klasycznej), która niesprzecznie formalizuje taką sytuację, i to zostało uczynione.

Autor znalazł (chyba najsłabszą) intuicjonistyczną logikę modalną iE^W , formalizującą taką sytuację. Jest to rozszerzenie najsłabszej ekstensjonalnej logiki modalnej E (funktor „konieczności” oznaczmy przez W), wzmocnione formułą $W\phi \rightarrow \neg\phi$. Semantyka to semantyka otoczeniowa, z ograniczeniami na funkcję \mathcal{N} , uzupełniona relacją częściowego porządku. Twierdzenie

o pełności uzyskuje konstruując rozszerzenia kanoniczne i dowodząc twierdzenia podstawowego dla modeli kanonicznych (Tw. 3.14.). To, że jest to logika „falszywych wierzeń” wynika raczej z semantyki, niż z podanego aksjomatu.

Dalsze rozszerzenia to intuicjonistyczne wersje dwóch podlogik logiki S^W Ch. Steinsvolda z 2011 roku, opartej na klasycznym rachunku zdań; tu zamiast semantyki Kripkego, jak u Steinsvolda mamy semantykę otoczeń. Autor prezentuje twierdzenia o pełności.

Wreszcie ostatni istotny fragment tej części: „Potwierdzanie, zachęcanie i odradzanie”. Autor przedstawia dwie pary nowych modalności (konieczności i możliwości), interpretowanych w semantyce otoczeniowej, które mają uchwycić intuicyjny sens pojęć potwierdzania, zachęcania i odradzania, przy czym wszystkie te modalności mogą wystąpić w jednym systemie logiki. Rozważania te prowadzą Autora do czterech osobnych systemów, dla których podaje on dowody pełności. Doniosłość rozważań dotyczy tu jednak intuicyjnej strony badań; dowody pełności są standardowe.

Część ta, zwłaszcza jej pierwszy fragment przynosi nowe rezultaty i w dużej mierze stanowi o randze pracy.

Pozostałe części.

W części 4 autor przedstawia przegląd uogólnień pojęcia topologii, występujących w literaturze. Przegląd ten zajmuje 14 stron. Autor dokonuje próby wykorzystania uogólnienia topologii, wprowadzonego przez Cszazara, do powiązania topologii ze strukturami otoczeniowymi, używanymi wcześniej w pracy. Rezultaty zawarte w tej części - także próby konstrukcji pewnych logik - są interesujące, wskazują bowiem na trudności i problemy, ale są częściowe: nie prowadzą do matematycznie istotnych rezultatów.

W części 5 autor bada tzw. przestrzenie infra-topologiczne, nie uzyskując poważniejszych wyników. Podobnie w części 6, będącej poniekąd kontynuacją części 4, nie przedstawia interesujących matematycznie rezultatów.

Ocena pracy i podsumowanie

1. Jak wynika z omówienia, praca zawiera dwa wartościowe osiągnięcia w dziedzinie logik intuicjonistycznych. Wyniki te zostały już uznane przez środowisko naukowe, czego wyrazem są 2 publikacje w recenzowanych piśmie naukowych, w tym w BSL.

2. Rozprawa zredagowana jest starannie. Dowody lematów i twierdzeń są na ogół przedstawione jasno i przejrzysto. Podobnie, poprawnie są redagowane definicje.

3. Autor naszkicował całą panoramę badań w „trójkącie”: logiki intuicjonistyczne - struktury otoczeniowe - topologia. Wykazał niemałą biegłość, także techniczną, w tej problematyce, choć nie zawsze udawało mu się zakończyć rozważania efektywnym wynikiem matematycznym. Stanowi to obiecującą perspektywę dla dalszych badań i wyników. To też jest walor tej rozprawy.

4. Obfita jest bibliografia; podkreślić trzeba, że wyniki Autora nawiązują do prac nowych, wchodzących w obieg naukowy.

W konkluzji stwierdzam, że rozprawa doktorska pana Tomasza Wojtacza spełnia wymagania stawiane przez ustawę o stopniach naukowych i wnoszę o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Kazimierz Świątkowski