

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Judyty Bąk

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH BAZ ORAZ π -BAZ PRZESTRZENI TOPOLOGICZNYCH

(20 maja 2021)

Rozprawa dotyczy wybranych zagadnień topologii ogólnej. Główny motyw to tzw. *własność Freese-Nation* oraz jej różne warianty. Ostatni rozdział dotyczy gry Banacha-Mazura/Choqueta w kontekście teorii dziedzin.

Rozprawa jest oparta na serii czterech artykułów, wspólnych z promotorem:

- (1) J. Bąk, A. Kucharski, *Topological spaces with the Freese-Nation property*, Ann. Math. Sil. 33 (2019) 41–54
- (2) J. Bąk, A. Kucharski, *The Banach-Mazur game and domain theory*, Arch. Math. (Basel) 114 (2020) 51–59
- (3) J. Bąk, A. Kucharski, *An internal characterization of complete regularity*, Math. Slovaca 70 (2020) 775–777
- (4) J. Bąk, A. Kucharski, *Topological spaces with the Freese-Nation property II*, Topology Appl. (to appear), arXiv:1904.08902

Ilościowo, jest to świetny dorobek, zwłaszcza biorąc pod uwagę, że temat należy do stosunkowo skrajnego działu matematyki teoretycznej.

Jeśli chodzi o moją ocenę jakościową, to wolałbym nie wdawać się w bibliometrię i tym podobne rzeczy, które mają być może jakiś sens przy ocenianiu jednostek naukowych, ale na pewno nie przy ocenie indywidualnego młodego naukowca, która powinna być zdecydowanie merytoryczna.

Mimo wszystko, pozwolę sobie na kilka osobistych uwag co do jakości czasopism z powyższej listy:

- Artykuł (1) został opublikowany w bardzo mało znaczącym lokalnym czasopiśmie na Uniwersytecie Śląskim.
- Artykuł (2) jest opublikowany w bardzo przyzwoitym czasopiśmie *Archiv der Mathematik*, który ma długą tradycję (od 1948 roku) i publikuje krótkie (do 10 stron) prace ze wszystkich działów matematyki.
- Artykuł (3) został opublikowany w przyzwoitym czasopiśmie *Mathematica Slovaca*, które ma prawie równie długą tradycję (od 1951 roku) i ma profil ogólnomatematyczny. Co więcej, czasopismo to firmuje Słowacka Akademia Nauk.

- Artykuł (4) został przyjęty do specjalistycznego czasopisma *Topology and its Applications*. Ukaże się w specjalnym zeszycie poświęconym profesorowi Jerzemu Mioduszewskiemu.

Tak więc, moja ocena jakości czasopism jest raczej prosta. Pomijając artykuł (1), kolejne dwa ukazały się w bardzo przyzwoitych czasopismach ogólnomatematycznych z długą tradycją, a czwarty artykuł ukaże się w specjalistycznym czasopiśmie, które w środowisku matematyków związanych z topologią ogólną cieszy się sporym uznaniem i prestiżem.

Z powyższych uwag jasno widać, że Autorka przedstawionej rozprawy odniosła znaczące sukcesy w kwestii publikowania wyników. Oczywiście, wszystkie wyniki są wspólne z promotorem, ale tak się składa, że miałem przyjemność słuchać kilku referatów pani Judyty Bąk na konferencjach naukowych, a także przeprowadzić z nią kilka krótkich dyskusji matematycznych, po których mogę spokojnie twierdzić, że jej wkład w wyniki jest znaczący. Poza tym, jak dobrze wiadomo, w pracy naukowej w matematyce teoretycznej ciężko opisać konkretny wkład autora, często jest to wynik wspólnej dyskusji, a czasem z pozoru proste czy naiwne pytanie jednego współautora prowadzi do tego, że drugi współautor wpadnie na rozwiązanie rozważanego problemu.

Poniżej moje uwagi na temat oceny jakościowej wyników, nie odwołujące się już do czasopism czy jakiegokolwiek bibliometrii.

Ocena merytoryczna. Własność *Freese-Nation*, główny motyw rozprawy, jest dosyć specjalną własnością przestrzeni topologicznych i algebr Boole’a, studiowaną w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku przez Heindorfa i Shapiro. Pierwotnie, własność ta została wprowadzona przez Freese’a i Nationa w 1975 w celu scharakteryzowania krat projektywnych. Własność ta doczekała się różnych uogólnień (np. zamieniając w definicji słowo “skończony” na “mocy $< \kappa$ ”). Autorka skupia się na klasycznej własności Freese-Nation oraz jej wariacjach: separatywna i aproksymacyjna. Własności te są w istocie definiowane dla rodzin zbiorów, które stanowią π -bazę ustalonej przestrzeni topologicznej. Autorka na wstępie pokazuje, że w wielu przykładach (wliczając w to algebry Boole’a) wszystkie trzy warianty własności Freese-Nation są równoważne. Dalej, w rozdziale 2, Autorka bada własność FN pod kątem zachowywania przez naturalne operacje, takie jak produkty, przy czym pozytywny wynik uzyskuje dla wariantu separatywnego. Ciekawy jest też wynik o przeliczalnej liczbie Suslina. Kolejna sekcja zawiera twierdzenie mówiące, że przestrzenie metryzowalne mają własność Freese-Nation. Można tam też znaleźć ogólniejszy wynik z dosyć technicznymi ale użytecznymi założeniami. Rozdział 3 zawiera badania przestrzeni topologicznych (głównie zwartych), które opisują się w terminach specjalnych systemów odwrotnych. Najważniejsza w tym rozdziale jest klasa przestrzeni *otwarcie generowanych*, a także jej wariant, czyli przestrzenie *szkieletowo generowane*. W obu przypadkach chodzi o granice

systemów odwrotnych σ -zupełnych, w których odwzorowania łączące są otwarte bądź szkieletowe. Autorka uzyskała, między innymi, nową charakteryzację klasy przestrzeni zwartych otwarcie generowanych, poprzez separatywną własność Freese-Nation. Dalej, autorka rozważa grę topologiczną (zwaną otwarto-otwartą), przy pomocy której ponownie charakteryzuje separatywną własność Freese-Nation. Krótki rozdział 4 zawiera ładne wyniki „negatywne”, opisując przykłady klas przestrzeni, które nie mają własności Freese-Nation. Rozdział 5 zawiera szereg wyników na temat związków własności Freese-Nation oraz przestrzeni Gleasona, co w terminach algebr Boole’a odpowiada uzupełnieniu algebry. Własność π -FN jest tutaj jak najbardziej naturalna, aczkolwiek dowód, że własność ta jest równoważna dla przestrzeni koabsolutnych (czyli mających tę samą przestrzeń Gleasona) nie jest wcale oczywisty. Rozdział 6 (ostatni) dotyczy przestrzeni generowanych przez dziedziny (zbiory częściowo uporządkowane zupełne i skierowane). Pojawia się tutaj klasyczna gra Banacha-Mazura. Najważniejsze wyniki to twierdzenia 6.2 i 6.3 pokazujące, że zupełność w sensie Choqueta odpowiada nieco technicznej własności „bycia reprezentowaną przez dziedzinę”.

Uważam, że główne wyniki rozprawy są z pewnością nietrywialne, wymagają dobrej techniki i umiejętności kojarzenia różnych pojęć. Rozprawa zawiera sporo technicznych lematów z dość długimi dowodami. Warto zwrócić uwagę na to, że Autorka opanowała pewne podstawowe techniki teorii kategorii, sprawnie posługuje się w temacie systemów odwrotnych i ich granic.

Osobiście uważam wyniki artykułów (2) i (4) za najbardziej znaczące. Pochwalić warto powiązanie teorii dziedzin z grą Banacha-Mazura w pracy (2) oraz bardzo nietrywialne dowody głównych wyników prac (4) i (1). Ponadto, głębokie studium różnych wariantów własności Freese-Nation zasługuje na uwagę i może być przyczynkiem do dalszej pracy naukowej w tym temacie.

Uwagi krytyczne. Jeśli chodzi o aspekt merytoryczny, to nie mam zasadniczych uwag—Autorka pracowała nad bardzo konkretnym tematem, w którym zdołała uzyskać szereg nietrywialnych wyników, czasem używając trudnych narzędzi, takich jak systemy odwrotne. Pytanie, na ile są te wyniki ciekawe czy użyteczne pozostanie oczywiście bez odpowiedzi, ponieważ w danej chwili nie wiemy w jakim kierunku potoczą się badania w czystej matematyce, a konkretnie w topologii ogólnej i teorio-mnogościowej.

Jeśli chodzi o stronę redakcyjną, to uważam, że Autorka bardzo dobrze opanowała technikę pisania tekstów matematycznych w środowisku $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$. Mam jednak kilka uwag krytycznych, które w żaden sposób nie wpływają na ostateczną ocenę rozprawy.

1. Każdy rozdział powinien się zaczynać na nowej stronie. Ponadto, niektóre rozdziały od razu zaczynają się sekcją, brakuje jakiegoś zdania wstępnego, omawiającego treść całego rozdziału.
2. W tekście mającym ponad 100 stron numeracja lematów, twierdzeń, faktów, itd. powinna być jednolita według sekcji, a nie tak jak w rozprawie, gdzie (na

przykład) twierdzenie 3.3 jest tuż za lematem 3.15. Jak w tym przypadku znaleźć twierdzenie 3.2?

3. Lemat 3.2 jest dość trywialny i znany (dowód wykorzystuje tylko i wyłącznie podstawowe własności obrazu i przeciwobrazu funkcji). Na miejscu byłby więc komentarz na ten temat.
4. Lemat 4.1 jest dobrze znany: $RO(X)$ jest zupełną algebrą Boole'a, a więc jeśli jest nieskończona, to ma moc co najmniej kontinuum. Dowód, który Autorka przedstawiła jest jak najbardziej na miejscu, ale powyższy komentarz powinien być się gdzieś znaleźć.
5. Strona 74, Twierdzenie 5.6: Powinno być „Gleason (rok?)” a nie „Gleason'a”.
6. Strona 74, ostatnie dwie linijki: Jest tu jakaś sprzeczność, „dobrze znany” fakt powinien być widoczny, przynajmniej gdzieś w internecie. Powinno raczej być: „wydaje się być znany” czy coś w tym stylu.
7. Strona 100: „...będziemy nazywać α -korzystnymi”. To pojęcie pochodzi od Choqueta, co należało zaznaczyć.
8. Literatura: Niekonsekwencja stylu, niektóre czasopisma są w formie skrótowej, inne w pełnej (np. [18] vs. [19]).

Mógłbym tu jeszcze dodać niepoprawne używanie apostrofów przy odmianie obcych nazwisk (np. „Nationa” a nie „Nation'a”), ale w dzisiejszych czasach i tak nikt nie dba o poprawność języka polskiego, a już na pewno recenzent nie powinien się do tego mieszać. Podsumowując, rozprawa jest napisana bardzo sprawnie, a wszystkie wymienione powyżej usterki są po prostu wynikiem braku doświadczenia Autorki i, tak jak wspominałem, nie mają wpływu na ostateczną ocenę.

Konkluzja. Uważam, że przedstawiona praca doktorska pani mgr Judyty Bąk **zdecydowanie spełnia** ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuje o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie Autorki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

20 maja 2021



Wiesław Kubiś

Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences